UNIVERSITATEA „AL.I.CUZA" IAȘI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ

IOAN POP CORINA SAVA HE ZHENG XU

TOPOLOGIE ALGEBRICĂ
EXERCIȚII REZOLVATE

PENTRU UZUL STUDENȚILOR
1983

UNIVERSITATEA "AL.I.CUZA" IASI
FACULTATEA DE MATEMATICA

Distinsului nostru
profesor și mentor
D-sa dr. doc.
Radu Miron, cu
cel mai adînc respect
și sinceră recunoștință
Autorii
I. Pop, Sava C.
15 iunie 1983

IOAN POP CORINA SAVA HE ZHENG XU

TOPOLOGIE ALGEBRICA

EXERCITII REZOLVATE

-1983-

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Capitolul 1 PRELIMINARII ALGEBRICE SI TOPOLOGICE 1

Capitolul 2 OMOTOPIE SI COMPLEXE SIMPLICIALE.....11

Capitolul 3 GRUPUL FUNDAMENTAL.....26

Capitolul 4 TEORIA OMOLOGIEI.....52

Capitolul 5 COOMOLOGIE SI TEOREME DE DUALITATE.....78

Capitolul 6 TEORIA GENERALA A OMOTOPIEI.....107

Capitolul 7 GRUPURI DE OMOTOPIE SI CW-COMPLEXE.....147

Capitolul 8 OMOLOGIA SI COOMOLOGIA CW-COMPLEXELOR.....194

Abstract.....237

Contents 238

"LIBERTÉ, ÉGALITÉ, HOMOLOGIE"

(Michael Henle).

P r e f a ţ ă

După o perioadă de tatonări, Seminarul nostru de Topologie algebrică şi-a reluat activitatea în anul 1980, cu destul de mult entuziasm şi hotărîre. Au aderat la acest Seminar: Corina Sava, Marin Guţan, Constantin Cocea, Cătălin Popa, studentul He Zheng Xu şi ceva mai tîrziu Mirela Ştefănescu. Ne-am propus să învăţăm o carte. Am ales "ALGEBRAIC TOPOLOGY" de C.R.F. MAUNDER, ediţia 2-a, Cambridge University Press, 1980. S-au ţinut, cu rare abateri, şedinţe săptămînale, timp de peste un an şi jumătate. Au ţinut lecţii Corina Sava, Marin Guţan, He Zheng Xu, Ctin Cocea şi subsemnatul. Apoi, au fost rezolvate toate exerciţiile propuse de autor la sfîrşitul Capitolelor 2-8 (primul capitol, preliminar, nu are exerciţii).

Am considerat că am întinde o mînă amicală celor care vor dori să înveţe şi ei această excelentă carte, sau o alta, de topologie algebrică, redactînd într-o formă rezonabilă soluţiile exerciţiilor. Pentru a începe cu Capitolul 1, am adăugat noi cîteva exerciţii, unele din ele fiind utile unor soluţii ulterioare. De asemenea, am adăugat la sfîrşitul fiecărui capitol mici completări bibliografice şi comentarii.

In text sînt trimiteri de două tipuri: sau de forma Teorema 2.5.3 care se referă la cartea lui Maunder, sau de forma Exerciţiul 4.8, care înseamnă exerciţiul 8 din capitolul 4 al acestei culegeri.

In încheiere doresc să menţionez că din cauza unor alte importante activităţi (examene de doctorat, definitivat, concursuri, obligaţii didactice, ş.a) nu toţi membrii Seminarului nostru au putut participa în aceeaşi măsură la rezolvarea exerciţiilor şi redactarea soluţiilor; aportul tuturor a fost însă important.

Autorii aduc mulţumiri tovarăşilor prof.dr.doc. Radu Miron şi lector dr. Mihai Anastasiei pentru amabilitatea şi competenţa în rolul d-lor de referenţi.

Iaşi, 18 martie, 1983 I. Pop

Capitolul 1. PRELIMINARII ALGEBRICE SI TOPOLOGICE.

1.1. Pe o mulţime M sînt date două legi de compoziţie interne, notate respectiv cu "$\circ$" şi "$*$". Presupunem că acestea au acelaşi element neutru e şi satisfac relaţia $(x*y)\circ(x'*y')=(x\circ x')*(y\circ y')$, $\forall x,y,x',y'\in M$.

Să se arate că cele două legi de compoziţie coincid, sînt comutative şi asociative.

Rezolvare. Fie $x,y\in M$. Avem: $x*y=(x\circ e)*(e\circ y)=(x*e)\circ(e*y)=x\circ y$, deci cele două legi coincid. Apoi, $x*y=(e*x)*(y*e)=(e*y)*(x*e)=y*x$. In sfîrşit, pentru $x,y,z\in M$, avem $(x*y)*z=[(x*e)*y]*(e*z)=[(x*e)*e]*[y*(e*z)]=x*(y*z)$.

1.2. (a) Considerăm mulţimea de matrice complexe

$$H=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix} \middle/\ a,b\in C\right\}.$$

Să se arate că, în raport cu operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire, H este un corp necomutativ. (Acesta este corpul cuaternionilor).

(b) Să se arate că mulţimea H' a matricelor reale de forma

$$A=\begin{pmatrix} s & -t & -u & -v \\ t & s & -v & u \\ u & v & s & -t \\ v & -u & t & s\end{pmatrix}$$

formează, în raport cu operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire, un corp izomorf cu H.

(c) Să se arate că H constituie, în raport cu adunarea şi înmulţirea uzuală a unei matrice cu un număr, un spaţiu vectorial real de dimensiune patru. Să se pună în evidenţă o bază $\{1,i,j,k\}$, astfel încît înmulţirea să se definească prin relaţiile $1\cdot x=x\cdot 1=x$, $i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=-ji=k$, $ki=-ik=j$, $jk=-kj=i$.

Rezolvare.

In raport cu adunarea H este grup comutativ, cum se verifică imediat. Avem apoi:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ -\bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'-b\bar{b}' & ab'+b\bar{a}' \\ -\bar{b}a'-\bar{a}b' & \bar{a}\bar{a}' - \bar{b}b' \end{pmatrix},$$

care arată că înmulțirea este operație internă. Asociativitatea și distributivitatea sînt generale. Matricea identiate este în H și dacă $A \in H$ este nenulă, aceasta înseamnă $|a|^2+|b|^2 \neq 0$ (deoarece $a \neq 0$ sau $b \neq 0$) și deci A este inversabilă. Avem

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{a}}{a^2+b^2} & \dfrac{-b}{a^2+b^2} \\ \dfrac{\bar{b}}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \in H.$$

Necomutativitatea se arată luînd de exemplu

$$A=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ pentru care } AB=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ și } BA=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

(b). Dacă $A, B \in H'$, se verifică imediat că $A+B$ și $A \cdot B \in H'$. Apoi, matricea nulă, matricea unitate și opusa unei matrice din H' sînt toate din H'. În sfîrșit, dacă $A \in H'$, este matricea scrisă în enunț, avem $\det A=(s^2+t^2+u^2+v^2)^2$ și prin urmare, dacă $A \neq 0$, atunci A este inversabilă și

$$A^{-1}=(s^2+t^2+u^2+v^2)^{-1}\begin{pmatrix} s & t & u & v \\ -t & s & v & -u \\ -u & -v & s & t \\ -v & u & -t & s \end{pmatrix} \in H'.$$

Aplicația $f: H \longrightarrow H'$, definită prin

$$f\begin{pmatrix} s+it & u+iv \\ -u+iv & s-it \end{pmatrix} = A\text{-matricea din enunț}$$

este un izomorfism de corpuri.

(c). Faptul că H este un spațiu vectorial real se vede imediat. Putem pune în evidență o bază în acest spațiu vectorial.

$1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $i=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}&0\\0&-\sqrt{-1}\end{pmatrix}$, $j=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $k=\begin{pmatrix}0&\sqrt{-1}\\-\sqrt{-1}&0\end{pmatrix}$. Această bază verifică de altfel și condițiile cerute pentru înmulțire.

1.3. Se consideră un șir exact de grupuri și homomorfisme de grupuri

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\theta} H \xrightarrow{\phi} K \longrightarrow 0$$

cu H (și G) abelian. Să se arate că dacă există un homomorfism $\theta': H \longrightarrow G$, astfel încît $\theta'\theta = 1_G$, atunci K este abelian și șirul este scindat.

Rezolvare. Vom construi un homomorfism $\psi: K \longrightarrow H$, care să satisfacă condiția $\phi\psi = 1_K$. Va rezulta că ψ este monomorfism, deci K se poate identifica cu un subgrup al lui H și că șirul este scindat (vezi Propoziția 1.3.36 și definiția ce-i urmează).

Fie $k \in K$. Avem, pentru că ϕ este epimorfism, $k = \phi(h)$, $h \in H$. Arătăm că este bine definită aplicația ψ prin $\psi(k) = h - \theta(\theta'(h))$. In adevăr, dacă avem și $k = \phi(h_1)$, atunci $\phi(h) = \phi(h_1)$, implică $h - h_1 = \partial(g)$, $g \in G$. Prin urmare $\theta'(h) - \theta'(h_1) = \theta'\theta(g) = g$. Rezultă că avem $[h - \theta(\theta'(h))] - [h_1 - \theta(\theta'(h_1))] = h - h_1 - [\theta(\theta'(h)) - \theta(\theta'(h_1))] = \theta(g) - \theta(g) = 0$.

Arătăm că ψ este un homomorfism. Dacă luăm $k_1, k_2 \in K$, fie $k_1 = \phi(h_1)$, $k_2 = \phi(h_2)$. Atunci $k_1 + k_2 = \phi(h_1 + h_2)$ și prin urmare $\psi(k_1 + k_2) = h_1 + h_2 - \theta(\theta'(h_1 + h_2)) = h_1 + h_2 - \theta\theta'(h_1) - \theta\theta'(h_2) = (h_1 - \theta\theta'(h_1)) + (h_2 - \theta\theta'(h_2)) = \psi(k_1) + \psi(k_2)$.

In sfîrșit, $\phi\psi(k) = \phi(h - \theta\theta'(h)) = \phi(h) - \phi\theta\theta'(h) = \phi(h) = k$, deci $\phi\psi = 1_K$.

1.4. Fie un șir exact de spații liniare de dimensiuni finite peste un cîmp k

$$0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 \longrightarrow 0$$

Să se arate că $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim X_i = 0$.

Rezolvare. Avem $\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Pe de altă parte, pentru fiecare transformare liniară $f_i: X_i \longrightarrow X_{i-1}$, avem

$\dim X_i = \dim(\mathrm{Im}\, f_i) + \dim(\mathrm{Ker}\, f_i) = \dim(\mathrm{Ker}\, f_{i-1}) + \dim(\mathrm{Ker}\, f_i)$.

Obţinem de aici:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim X_i = \dim X_0 + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(\dim(\mathrm{Ker}\, f_{i-1}) + \dim(\mathrm{Ker}\, f_i)) =$$

$$= \dim X_0 - \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \dim(\mathrm{Ker}\, f_i) + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim(\mathrm{Ker}\, f_i) =$$

$= \dim X_0 - \dim(\mathrm{Ker}\, f_0) + (-1)^n \dim(\mathrm{Ker}\, f_n)$. Dar $\mathrm{Ker}\, f_0 = X_0$, $\mathrm{Ker}\, f_n = 0$, deci $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim X_i = 0$

Observaţie: Dacă şirul dat este numai semiexact, adică $\mathrm{Im}\, f_i \subset \mathrm{Ker}\, f_{i-1}$, se obţine $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim X_i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim(\mathrm{Ker}\, f_i / \mathrm{Im}\, f_{i+1})$ pentru $\mathrm{Im}\, f_{n+1} = 0$. (Să se vadă şi Exerciţiul 4.18).

1.5. Să se arate că mulţimea $X = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in S^n / x_0^2 + \ldots + x_{k-1}^2 \leq x_k^2 + \ldots + x_n^2\}$ este homeomorfă cu $D^k \times S^{n-k}$.

Rezolvare. Definim aplicaţia $f: X \longrightarrow D^k \times S^{n-k}$, prin

$$f((x_0, \ldots, x_n)) = \left(\frac{1}{\sqrt{x_k^2 + \ldots + x_n^2}}(x_0, \ldots, x_{k-1}), \frac{1}{\sqrt{x_k^2 + \ldots + x_n^2}}(x_k, \ldots, x_n)\right).$$

Deoarece $x_0^2 + \ldots + x_{k-1}^2 \leq x_k^2 + \ldots + x_n^2$, rezultă $x_k^2 + \ldots + x_n^2 \geq 1/2$ şi deci f este definită peste tot. Este şi injectivă, deoarece $f(x) = f(y)$, implică $\frac{x_i}{\sqrt{x_k^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{y_i}{\sqrt{y_k^2 + \ldots + y_n^2}}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, care împreună cu $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$, implică $x_i = y_i$, deci $x = y$. Apoi f este şi surjectivă, deoarece pentru $(a_0, \ldots, a_{k-1}) \in D^k$, $(a_k, \ldots, a_n) \in S^{n-k}$, avem

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{a_0^2 + \ldots + a_n^2}}(a_0, \ldots, a_n)\right) = ((a_0, \ldots, a_{k-1}), (a_k, \ldots, a_n)).$$

Cum f este continuă şi X este comapct, iar $D^k \times S^{n-k}$ este separat, rezultă că f este un homeomorfism.

1.6. Fie $f, g: X \longrightarrow E^n$, $n \geq 1$, X arbitrar, două funcţii continue, încît $f(x) \neq g(x)$, $\forall x \in X$. Semidreapta $f(x)g(x)$ intersectează sfera S^{n-1} într-un punct $h(x)$. Să se arate că aplicaţia $h: X \longrightarrow S^{n-1}$, $x \longrightarrow h(x)$ este continuă.

Rezolvăre. Fie $f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))\in E^n$, $g(x)=(g_1(x),\dots,g_n(x))\in E^n$ și $h(x)=(h_1(x),\dots,h_n(x))\in S^{n-1}$. Există atunci $\lambda(x)\in R$, cu $\lambda(x)\geq 0$ astfel încît $h_i(x)=g_i(x)+\lambda(x)(g_i(x)-f_i(x))$. Pentru a dovedi continuitatea aplicației f este suficient să dovedim continuitatea aplicației $\lambda: X \longrightarrow R$. Avem satisfăcută relația $\sum_{i=1}^{n}(g_i(x)+\lambda(x)(g_i(x)-f_i(x))^2=1$, adică $\lambda(x)^2\sum_{i=1}^{n}(g_i(x)-f_i(x))^2+$

$+2\lambda(x)\sum_{i=1}^{n}g_i(x)(g_i(x)-f_i(x))+\sum_{i=1}^{n}g_i(x)^2-1=0.$

Prin urmare :

$$\lambda(x)=\frac{-\sum g_i(x)(g_i(x)-f_i(x))\pm\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}g_i(x)(g_i(x)-f_i(x))\right]^2+\sum(g_i(x)-f_i(x))^2\left(1-\sum g_i(x)^2\right)}}{\sum[g_i(x)-f_i(x)]^2}$$

Cum $\lambda(x)\geq 0$ și $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[g_i(x)(g_i(x)-f_i(x)]^2+\sum_{i=1}^{n}(g_i(x)-f_i(x))^2\cdot(1-\sum_{i=1}^{n}g_i(x)^2}\geq\sum_{i=1}^{n}g_i(x)(g_i(x)-f_i(x))$, rezultă că avem

$$\lambda(x)=\frac{\sqrt{\sum g_i(x)(g_i(x)-f_i(x))+\sum(g_i(x)-f_i(x))^2(1-\sum g_i(x)^2-\sum g_i(x)(g_i(x)-f_i(x))}}{\sum(g_i(x)-f_i(x))^2}$$

și deoarece $\sum_{i=1}^{n}(g_i(x)-f_i(x))^2\neq 0$, iar f_i, g_i sînt continue, rezultă că λ este continuă.

1.7. Fie X un spațiu topologic, ρ o relație de echivalență pe X și X/ρ spațiul cît. Se spune că relația ρ este închisă dacă proiecția canonică $p: X \longrightarrow X/\rho$ este aplicație închisă. Să se arate că dacă ρ este închisă și X este un spațiu normal, atunci X/ρ este de asemenea spațiu normal.

Rezolvare. Fie I_1, I_2 mulțimi închise disjuncte și saturate din X. Deoarece X este spațiu normal, există două vecinătăți U_1 și U_2 pentru respectiv I_1 și I_2 și care sînt disjuncte. Atunci $p^{-1}p(X-U_1)$, $p^{-1}p(X-U_2)$ sînt închise, $p^{-1}p(X-U_1)\supset X-U_1$, $p^{-1}p(X-U_2)\supset X-U_2$ și $V_1=X-p^{-1}p(X-U_1)\subset U_1$, $V_2=X-p^{-1}p(X-U_2)\subset U_2$. Atunci V_1 și V_2 sînt deschise în X și saturate și avem

$I_1 \subset V_1, I_2 \subset V_2$ (deoarece I_1, I_2 sînt saturate) și $V_1 \cap V_2 \subset U_1 \cap U_2 = \phi$. Prin urmare, $p(V_1), p(V_2)$ sînt vecinătăți pentru $p(I_1), p(I_2)$ și aceste vecinătăți sînt disjuncte. Prin urmare X/ρ este normal.

1.8. Să se arate că pentru $n \geq 1$, sfera S^n este un spațiu liniar conex.

Rezolvare. Este clar că E^n este un spațiu liniar conex, fiind o mulțime convexă. Apoi, sfera S^n este homeomorfă cu spațiul obținut de adjuncție $E^n \cup_i E^n$, pentru i incluziunea $E^n \supset S^{n-1} \xrightarrow{i} S^{n-1} \subset E^n$. In adevăr, avem, pentru

$E_1^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n / x_{n+1} \geq 0\}$ și $E_2^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n / x_{n+1} \leq 0\}$

$S^n = E_1^n \cup E_2^n$, $E_1^n \cap E_2^n = S^{n-1}$ și proiecția $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \longrightarrow (x_1, \ldots, x_n)$ determină homeomorfisme ale lui E_1^n și E_2^n cu E^n, egale cu identitatea pe S^{n-1}. Deoarece pentru $n \geq 1, S^{n-1} \neq \phi$, rezultă că spațiul de adjuncție obținut este liniar conex.

1.9. Fie X un spațiu topologic și R o relație de echivalență pe X. Să se arate că dacă R este deschisă și graficul acesteia $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in X \times X / x_1 R x_2\}$ este o submulțime închisă în $X \times X$, atunci X/R este un spațiu separat Hausdorff.

Rezolvare. Dacă $u_1 = p(x_1)$ și $u_2 = p(x_2) \in X/R, u_1 \neq u_2$, atunci avem $(x_1, x_2) \in \Gamma$. Deoarece $X \times X - \Gamma$ este deschisă și (x_1, x_2) este un punct al acesteia, există D_1, D_2 deschise în X, încît $(x_1, x_2) \in D_1 \times D_2 \subset X \times X - \Gamma$. Deoarece $p : X \longrightarrow X/R$ este deschisă, $p(D_1), p(D_2)$ sînt deschise în X/R. Avem apoi $u_1 = p(x_1) \in p(D_1)$ și $u_2 \in p(D_2)$. In sfîrșit, avem $p(D_1) \cap p(D_2) = \phi$, altfel ar urma că $(D_1 \times D_2) \cap \Gamma \neq \phi$.

1.10. Să se arate că spațiile proiective $RP^n, CP^n, HP^n, n \geq 0$ (vezi și Exercițiul 7.8) sînt spații separate Hausdorff.

Rezolvare. Spațiul proiectiv real este homeomorf cu spațiul cît S^n/ρ, pentru $x \rho y \Longleftrightarrow x = y$ sau $x = -y$. Fie $p : S^n \longrightarrow RP^n$ aplicația corespunzătoare de identificare. Aceasta este deschisă, deoarece dacă D este deschisă în S^n, atunci $p^{-1}(p(D)) =$

$=D \cup s(D)$, unde $s:S^n \longrightarrow S^n$ este simetria față de origine. Urmează că $p^{-1}(p(D))$ este deschisă, deci $p(D)$ este deschisă. Apoi, graficul relației φ este $\Gamma = \{(x,x)/x \in S^n\} \cup \{(x,-x)/x \in S^n\}$ $= \Delta \cup \Delta'$, unde Δ este diagonala produsului $S^n \times S^n$, iar Δ' este homeomorf cu Δ. Deoarece S^n este spațiu separat, rezultă imediat că Δ este mulțime închisă în $X \times X$. Rezultă astfel că Γ este închisă în $X \times X$ și se poate aplica acum Exercițiul 1.9.

Pentru CP^n se utilizează aplicația $p:S^{2n+1} \longrightarrow CP^n$, iar pentru HP^n, aplicația $p:S^{4n+3} \longrightarrow HP^n$.

1.11. Să se arate că într-un spațiu local liniar conex componentele liniar conexe sînt submulțimi deschise.

Rezolvare. Fie L componenta liniar conexă a unui punct $x \in X$, spațiul X fiind presupus local liniar conex. Fie $y \in L$, un punct oarecare. Există o vecinătate V a lui y încît oricare două puncte ale acesteia pot fi unite cu un drum (în X). Ori aceasta implică faptul că $V \subset L$ și prin urmare L este deschisă, fiecare punct al său fiind interior.

Cu totul analog se poate arăta că orice componentă liniar conexă a unei mulțimi deschise arbitrare dintr-un spațiu local liniar conex este mulțime deschisă.

1.12. Să se arate că mulțimea Q a numerelor raționale, cu topologia uzuală (de subspațiu al lui R), nu este spațiu local compact.

Rezolvare. Dacă presupunem contrariul, atunci $0 \in Q$ trebuie să aibă o vecinătate compactă V. Dar o submulțime compactă în Q trebuie să fie compactă și în R. Deci V trebuie să fie închisă în R. Ori nici o vecinătate a lui 0 în Q nu este închisă în R.

1.13. Fie $f:R^1 \longrightarrow S^1$ aplicația definită prin $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$.

(a) Utilizînd Teorema lui Lebesgue (Teorema 1.4.35), să se arate că orice drum (cu punct bază) în S^1 are o unică ridicare $\bar{u}:I \longrightarrow R^1$, adică $f\bar{u} = u$ (vezi Exercițiile 6.20 și 6.22).

(b). Dacă $u: I \longrightarrow S^1$ este un drum oarecare și r este un număr real, încît $u(0)=f(r)$, atunci există unic $\overline{u}: I \longrightarrow R^1$, astfel încît $\overline{u}(0)=r$ și $f\overline{u}=u$.

(c). Dacă $F: I \times I \longrightarrow S^1$ este o omotopie cu punct bază, atunci există $\overline{F}: I \times I \longrightarrow R$, cu punct bază, unică, încît $f\overline{F}=F$.

(d). Pentru un loop u în S^1, se consideră ridicarea sa punctată $\overline{u}$, pentru care avem $\overline{u}(1) \in Z$ și se definește gradul lui u, notat deg u (vezi și Definiția 7.4.1, pg. 288), ca fiind $\overline{u}(1)$.

Să se arate că este bine definit un homomorfism $d: \pi_1(S^1) \longrightarrow Z$, prin $d([u]) = \deg(u)$ și că d este un izomorfism.

Rezolvare. Această problemă va fi în parte rezolvată în exercițiile menționate din Capitolul 6, dar aici dăm o rezolvare directă, bazată pe Teorema lui Lebesgue.

(a). Considerăm cercul reprezentat ca $S^1 = \{ z \in C / |z| = 1 \}$. Atunci aplicația f se scrie încă $f(x)=\exp(2\pi ix)=\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$.

Fie arcele deschise $U_1 = \{ z=e^{2\pi it} / 0 < t < 3/4 \}$ și $U_2 = \{ z=e^{2\pi it} / -1/2 < t < 1/4 \}$. Acestea sînt deschise în S^1 și $S^1 = U_1 \cup U_2$, iar

$$f^{-1}(U_1) = \bigcup_{n \in Z} (n, n+3/4), \quad f^{-1}(U_2) = \bigcup_{n \in Z} (n-1/2, n+1/4).$$

Prin aplicația f orice interval $(n, n+3/4)$ este aplicat homeomorf pe U_1 și orice interval $(n-1/2, n+1/4)$ este aplicat homeomorf pe U_2.

Fie $u: I \longrightarrow S^1$. Considerăm acoperirea $\{u^{-1}(U_1), u^{-1}(U_2)\}$ a intervalului metric compact $I=[0,1]$ și fie δ numărul Lebesgue al acestei acoperiri. Corespunzător lui δ avem o divizare $0=t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, cu intervale de lungime $< \delta$ și astfel încît $\forall\, i$, avem $[t_i, t_{i+1}] \subset u^{-1}(U_1)$, sau $[t_i, t_{i+1}] \subset u^{-1}(U_2)$. Avem însă $u(0)=u(t_0)=1 \in U_1$ și prin urmare $u([t_0, t_1]) \subset U_2$.

Fie acum $V_0=(-1/2, 1/4)$ și definim $\overline{u}_0: [t_0, t_1] \longrightarrow R^1$, prin $\overline{u}_0(t) = (f/V_0)^{-1}(u(t))$. Avem apoi $u([t_1, t_2]) \subset U$, unde U este U_1 sau U_2 și atunci $u(t_1) \in U$, care implică $(f/U)^{-1}(t_1) \in f^{-1}(U)$ și fie V_1 componenta lui $f^{-1}(U)$ în care se aplică $\overline{u}_0(t_1)$. V_1 este unul din

intervalele $(n,n+3/4)$ sau $(n-1/2,n+1/4)$, deci f/V_1 este un homeomorfism. Definim $\bar{u}_1:[t_1,t_2] \longrightarrow R^1$, prin $\bar{u}_1(t)=(f/V_1)^{-1}(u(t))$, $t \in [t_1,t_2]$. Continuăm în felul acesta până este construit $u_n:[t_{n-1},t_n] \longrightarrow R$. Prin Lema de lipire (Propoziţia 1.4.15), putem construi aplicaţia continuă $\bar{u}:I \longrightarrow R$, prin $\bar{u}/[t_i,t_{i+1}]=\bar{u}_i$ şi aceasta satisface condiţiile $\bar{u}(0)=0$ şi $f\bar{u}=u$.

Să arătăm unicitatea aplicaţiei $\bar{u}$. Să presupunem că avem şi $\bar{\bar{u}}:I \longrightarrow R^1$, cu $\bar{\bar{u}}(0)=0$ şi $f\bar{\bar{u}}=u$. Datorită structurii de grup aditiv topologic a lui R, putem considera aplicaţia continuă $\bar{u}-\bar{\bar{u}}:I \longrightarrow R$, $t \longrightarrow \bar{u}(t)-\bar{\bar{u}}(t)$. Avem atunci $(\bar{u}-\bar{\bar{u}})(0)=0$ şi $f(\bar{u}(t)-\bar{\bar{u}}(t))=\dfrac{f(\bar{u}(t))}{f(\bar{\bar{u}}(t))}=1 \in S^1$, care arată că avem $\bar{u}(t)-\bar{\bar{u}}(t)=n(t) \in Z$. Mulţimea I fiind conexă, la fel trebuie să fie $(\bar{u}-\bar{\bar{u}})(I) \subset R$ şi rezultă că $\bar{u}(t)-\bar{\bar{u}}(t)=n=\text{const}$. Cum $\bar{u}(o)=\bar{\bar{u}}(0)$, obţinem $n=0$, deci $\bar{u}=\bar{\bar{u}}$.

(b). Definim $v:I \longrightarrow S^1$, prin $v(t)=\dfrac{u(t)}{u(0)}$. Avem că $v(0)=1$ şi deci există unic $\bar{v}:I \longrightarrow R$, cu $\bar{v}(0)=0$ şi $f\bar{v}=v$. Atunci $\bar{u}:I \longrightarrow R$, definit prin $\bar{u}(t)=\bar{v}(t)+r$, satisface condiţiile $\bar{u}(0)=r$ şi $f(\bar{u}(t))=f(\bar{v}(t))\,f(r)=\dfrac{u(t)}{u(0)}\cdot u(0)=u(t)$. Unicitatea rezultă imediat din unicitatea lui $\bar{v}$.

(c). Se procedează similar cu (a), înlocuind compactul I cu $I \times I$.

(d). Dacă u este un loop în S^1 şi $\bar{u}$ este ridicarea sa cu punct bază, avem $f\bar{u}=u$, deci $f(\bar{u}(1))=\bar{u}(1)=1$, care arată că $u(1) \in Z$.

Arătăm acum că două „loop-uri" u, v în S^1 sînt echivalente omotopic rel $\{0,1\}$ dacă şi numai dacă $\deg(u)=\deg(v)$. Fie ridicările acestora, respectiv $\bar{u},\bar{v}:I \longrightarrow R^1$. Avem atunci $\bar{u}(0)=\bar{v}(0)=0$, $\bar{u}(1)=\bar{v}(1)$ şi deci $[\bar{u}.\bar{v}^{-1}] \in \pi_1(R)=0$ (R fiind contractibil). Rezultă deci că există o omotopie $\bar{F}:I \times I \longrightarrow R$ a drumului $\bar{u}.\bar{v}^{-1}$ cu drumul e_0, sau între $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ rel $\{0,1\}$. Prin urmare $\bar{F}:I \times I \longrightarrow R$, $\bar{F}(t,0)=\bar{u}(t)$, $\bar{F}(t,1)=\bar{v}(t)$, $\bar{F}(0,t')=0$, $\bar{F}(1,t')=\bar{u}(1)=\bar{v}(1)$. Atunci $f\bar{F}:u \simeq v$ rel $\{0,1\}$.

Reciproc, dacă $u \simeq v$ rel$\{0,1\}$, prin omotopia $F: I \times I \longrightarrow S^1$, după (g'), există $\overline{F}: I \times I \longrightarrow R$, cu $F(0,0)=0$ şi $f\overline{F}=F$. Fie $\overline{u}: I \longrightarrow R$, $\overline{u}(t)=\overline{F}(t,0)$ şi $\overline{v}: I \longrightarrow R$, $\overline{v}(t)=\overline{F}(t,1)$. Atunci $\overline{u}(0)=\overline{F}(0,0)=0$ şi $f\overline{u}(t)=f\overline{F}(t,0)=F(t,0)=u(t)$, deci $\deg(u)=\overline{u}(1)=\overline{F}(1,0)$. Apoi, $f\overline{F}(t,1)=f\overline{F}(t,1)=v(t)$ şi $f\overline{F}(0,t')=F(0,t')=1$, care arată că $\overline{F}(0,t')=n(t') \in Z$. Cum avem însă $\overline{F}(0,0)=0$, rezultă $\overline{F}(0,t')=0$, adică $\overline{v}(0)=\overline{F}(0,1)=0$. Prin urmare $\deg(v)=\overline{v}(1)=\overline{F}(1,1)$. In sfîrşit, $f\overline{F}(1,t')=F(1,t')=1$, obţinem ca mai sus, $\overline{F}(1,t')=\text{const.}$ şi deci, $\overline{F}(1,0)=\overline{F}(1,1)$, adică $\deg(u)=\deg(v)$.

In felul acesta este bine definită aplicaţia $d: \pi_1(S^1) \longrightarrow Z$, prin $d([u])=\deg(u)$. Este surjectivă, deoarece pentru $n \in Z$, putem considera "loop"-ul $u: I \longrightarrow S^1$, $u(t)=e^{2\pi i t n}$, care are drept ridicare drumul $\overline{u}(t)=tn$ şi deci $\deg(u)=\overline{u}(1)=n$.

Este şi injectivă, deoarece dacă $\deg(u)=\deg(v)$, rezultă $[u]=[v]$. Este suficient deci să mai arătăm că d este un homomorfism de grupuri, deci că $\deg(u.v)=\deg(u)+\deg(v)$. Fie $\overline{u}, \overline{v}$ ridicări pentru u şi respectiv v. Definim $\overline{w}: I \longrightarrow R$ prin

$$\overline{w}(t)=\begin{cases}\overline{u}(2t), & 0 \leq t \leq 1/2\\ \overline{u}(1)+\overline{v}(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1\end{cases}$$

Aceasta este bine definită şi continuă şi este o ridicare pentru u.v, cum se verifică imediat. Avem deci $\deg(u.v)=\overline{w}(1)=\overline{u}(1)+\overline{v}(1)=\deg(u)+\deg(v)$. Prin urmare d este şi homomorfism şi deci este un izomorfism.

Observaţie: Calculul grupului fundamental al cercului se face în în Cap.3 al cărţii, utilizînd triangularea cercului (vezi 3.3.14 (a), pg. 78).

C Mai multe proprietăţi şi aplicaţii ale gradului unui loop pe S^1 şi, mai general, al unei aplicaţii sferice $f: S^n \longrightarrow S^n$ se află în S.T.Hu: Homology Theory, A first course in algebraic topology, Holden-Day, Inc., 1966 (p.99-105, 150-160).

Capitolul 2. OMOTOPIE SI COMPLEXE SIMPLICIALE.

2.1. Utilizînd Corolarul 2.2.4, să se arate că oricare două aplicații $f, g: X \longrightarrow S^{n-1}$, care nu sînt surjective, sînt echivalente omotopic.

Rezolvare. Fie $y_1 \in f(X)$ și $y_2 \in g(X)$, $y_1, y_2 \in S^{n-1}$, $n \geq 2$. Notăm prin e_y aplicația constantă în $y \in S^{n-1}$. Atunci, după Corolarul 2.2.4, deoarece $f(x) \neq y_1$, $\forall\, x \in X$, rezultă că $f \simeq e_{-y_1}$. In mod analog, avem $g \simeq e_{-y_2}$. Relația de omotopie fiind o relație de echivalență, este suficient să arătăm că $e_{-y_1} \simeq e_{-y_2}$. Ori, dacă $\alpha : I \longrightarrow S^{n-1}$ este un drum unind $-y_1$ cu $-y_2$, atunci $F: X \times I \longrightarrow S^{n-1}$, definită prin $F(x,t) = \alpha(t)$ este o omotopie a lui e_{-y_1} cu e_{-y_2}.

2.2. Fie aplicațiile $f, g: RP^1 \longrightarrow RP^2$ definite prin $f[x,y] = [x,y,0]$ și respectiv $g[x,y] = [x,-y,0]$. Să se construiască o omotopie între f și g.

Rezolvare. Definim aplicația $F: RP^1 \times I \longrightarrow RP^2$ prin $F([x,y],t) = [x,(1-2t)y,\varphi(t)y]$, pentru $\varphi(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1/2] \\ 1-t, & t \in [1/2,1] \end{cases}$

Să observăm mai întîi că $(x,(1-2t)y,\varphi(t)y) \in R^3 - 0$, cînd $(x,y) \in R^2 - 0$. Dacă $x \neq 0$, acest lucru este evident. Dacă $x=0$, atunci $y \neq 0$ și dacă $t=1/2$, atunci $\varphi(1/2)y \neq 0$. Apoi, dacă $[x',y'] = [x,y]$, atunci $x' = rx$, $y' = ry$, care implică și $(1-2t)y' = (1-2t)y.r$ și $\varphi(t)y' = r.\varphi(t)y$. Deci F este bine definită.

Aceasta este de asemenea continuă, cum se constată imediat din diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} (R^2-0)\times I & \xrightarrow{F'} & R^3-0 \\ \downarrow p\times 1 & & \downarrow p' \\ RP^1 \times I & \xrightarrow{F} & RP^2 \end{array}$$

unde $F'((x,y),t) = (x,(1-2t)y,\varphi(t)y)$, iar p și p' notează proiecțiile canonice, $p \times 1$ fiind aplicație de identificare.

Avem apoi, $F([x,y],0)=[x,y,0]=f([x,y])$ şi $F([x,y],1)=[x,-y,0]=g([x,y])$. Deci $F:f\simeq g$.

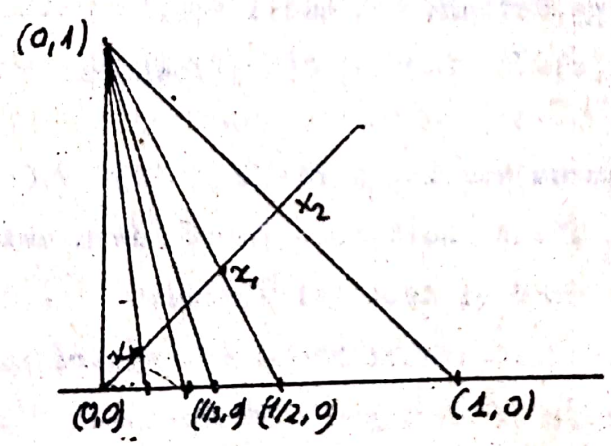
2.3. Să se arate că dacă Y este un spaţiu contractibil, atunci oricare două aplicaţii $f,g:X\longrightarrow Y$ sînt omotope.

Rezolvare. Dacă Y este contractibil, avem $1_Y\simeq c$, unde c este o aplicaţie constantă. Rezultă că avem $f\,1_Y\circ f\simeq c\circ f$, adică $f\simeq c'$ unde $c':X\longrightarrow Y$ este aplicaţia constantă $c'(X)=c(Y)$.

Avem de asemenea $g\simeq c'$ şi prin urmare, $f\simeq g$.

2.4. Fie X spaţiul lui R^2 constînd din segmentele de dreaptă unind punctul (0,1) cu punctele (1/n,0)(n=1,2,3,...) şi din segmentul unind (0,1) cu (0,0). Să se arate că X este contractibil, dar că aplicaţia $f:(X,(0,0))\longrightarrow(X,(0,0))$, definită prin $f(x)=(0,0)$, pentru $\forall\, x\in X$, nu este omotopă cu aplicaţia identitate ca aplicaţii de perechi (adică (X,(0,0)) nu este "pereche contractibilă").

Rezolvare.



X este contractibil deoarece putem considera aplicaţia $F:X\times I\longrightarrow X$, $F((x,y),t)=(0,1)+t(x,y-1)=t(x,y)+(1-t)(0,1)$. Este evident că F este corect definită, continuă şi $F((x,y),0)=(0,1)$ şi $F((x,y),1)=(x,y)$, deci $F:e_{(0,1)}\simeq 1_X$, deci X este contractibil.

Să presupunem acum că există $H:X\times I\longrightarrow X$, astfel încît $H(x,0)=x$, $H(x,1)=(0,0)$ şi $H((0,0),t)=(0,0)$.

Considerăm punctele $x_n=(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}) \in X$. Dacă presupunem că F este continuă în raport cu t, atunci pentru fiecare x_n obținem un drum $F_{x_n}: I \longrightarrow X, F_{x_n}(t)=F(x_n,t)$, care satisface condițiile: $F_{x_n}(0)=(0,0)$ și $F_{x_n}(1)=x_n$. Este clar că avem $(0,1) \in F_{x_n}(I)$, pentru fiecare x_n. Există deci $t_n \in [0,1]$, astfel încît $F(x_n,t_n)=(0,1)$. Fie acum (t_m) un subșir al șirului (t_n) care este convergent la $t_0 \in I$. Avem pe de o parte $F(x_m,t_m)=(0,1)$, iar pe de altă parte, cum $(x_m,t_m) \longrightarrow ((0,0),t_0)$, dacă presupunem funcția F continuă, trebuie să urmeze că $F((0,0),t_0)=(0,1)$, adică $(0,0)=(0,1)$, ceea ce este evident absurd.

2.5. Se consideră mulțimea $[A,X]$, unde A este un spațiu fixat. Să se arate că o aplicație continuă $f: X \longrightarrow Y$ induce o funcție $f_*: [A,X] \longrightarrow [A,Y]$, cu următoarele proprietăți:

(a) Dacă $f \simeq g$, atunci $f_* = g_*$,

(b) Dacă $1: X \longrightarrow X$ este aplicația identitate, atunci 1_* este funcția identitate.

(c) Dacă $g: Y \longrightarrow Z$ este o altă aplicație continuă, atunci $(gf)_* = g_* f_*$.

(d) Să se arate că dacă $X \simeq Y$, există o corespondență biunivocă între mulțimile $[A,X]$ și $[A,Y]$.

(e) Care sînt rezultatele corespunzătoare pentru mulțimile $[X,A]$, pentru un spațiu fixat A ?

Rezolvare. Se definește $f_*: [A,X] \longrightarrow [A,Y]$, prin $f_*([u])=[fu]$. In adevăr, dacă $v \simeq u$, atunci, după Corolarul 2.2.8, avem $fov \simeq fou$. Proprietățile (a)-(c) rezultă imediat. Pentru (d), dacă $f: X \longrightarrow Y, g: Y \longrightarrow X$, astfel încît $gf \simeq 1$ și $fg \simeq 1$, atunci $(gf)_* = 1_* = 1$ și $(fg)_* = 1_* = 1$, care arată că $g_* f_* = 1$ și $f_* g_* = 1$, deci f și g sînt bijecții.

(e) Se definește pentru $f: X \longrightarrow Y$ aplicația $f^*: [Y,A] \longrightarrow [X,A]$, prin $f^*([u])=[uf]$ și rezultatele (a)-(d) se transcriu imediat. In aprticular, dacă $X \simeq Y$, avem de

asemenea o bijecţie $[Y,A] \approx [X,A]$.

2.6. (a) K fiind un complex simplicial, $|K|$ este un subspaţiu închis şi compact a lui R^m.

(b) Un subcomplex L al unui complex simplicial K este el însuşi un complex simplicial şi $|L|$ este un subspaţiu închis al lui $|K|$.

(c) Dacă L şi M sînt subcomplexe ale lui K, atunci la fel sînt $K \cup L$ şi $K \cap L$.

(Vezi Propoziţia 2.3.6, (a), (c), (d)).

Demonstraţie.

(a) Deoarece fiecare simplex este o mulţime închisă şi compactă din R^m şi deoarece K este o mulţime finită de simplexe, rezultă că spaţiul $|K|$ este o reuniune finită de mulţimi compacte şi închise, deci este însuşi o submulţime închisă şi compactă.

(b) Din definiţia unui subcomplex este satisfăcută condiţia : dacă σ_n este un simplex din L şi τ_p este o faţă a lui σ_n, atunci τ_p este în L. Fie acum σ_n şi τ_p două simplexe din L. Acestea fiind din K, $\sigma_n \cap \tau_p$ este fie mulţimea vidă, fie o faţă comună pentru cele două simplexe şi care, conform celor de mai sus se află în L, adică este faţă comună în L a celor două simplexe. Astfel L este un complex simplicial (geometric).

(c) $L \cup M$ este o mulţime finită de simplexe. Evident faţa oricărui simplex din $L \cup M$ este în $L \cup M$ şi deci acesta este un subcomplex. Afirmaţia referitoare la intersecţie rezultă de asemenea imediat.

2.7. Să se construiască o triangulare a lui RP^2.

Rezolvare. Utilizînd Propoziţia 1.4.40(b), identificăm spaţiul RP^2 cu E^2/U, unde $xUy \Leftrightarrow x=y$, sau $x,y \in S^1$ şi $x=-y$. Se poate obţine atunci următoarea triangulare:

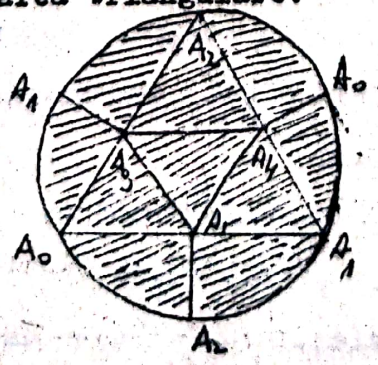


Fig. 1

adică un complex de dimensiune 2, având 6 vîrfuri, 13 muchii şi 10 simplexe de dimensiune 2.

2.8. Torul şi sticla lui Klein sînt definite astfel. Fie ABCD pătratul unitate din R^2 (Fig. 2).

Torul este spaţiul obţinut din ABCD identificînd muchiile AD şi BC şi apoi AB şi DC; mai precis, identificăm $(x_1,0)$ cu $(x_1,1)$ $(0 \leq x_1 \leq 1)$ şi de asemenea $(0,x_2)$ cu $(1,x_2)$ $(0 \leq x_2 \leq 1)$.

În mod analog, sticla lui Klein este obţinută identificînd $(x_1,0)$ cu $(x_1,0)$ şi $(0,x_2)$ cu $(1,1-x_2)$, adică AD cu BC şi AB cu CD.

Să se construiască triangulări pentru aceste două spaţii.

Rezolvare

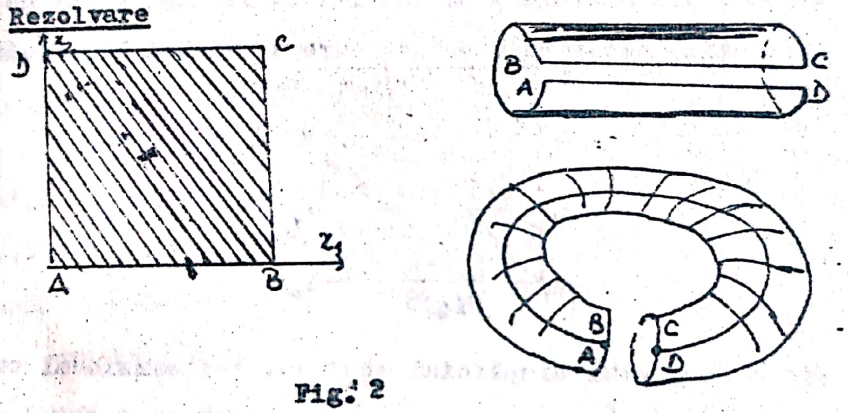


Fig. 2

Considerăm o triangulare a pătratului ABCD, care prin identificările prescrise să ne conducă tot la un complex simplicial.

Obţinem pentru tor triangularea din Fig. 3

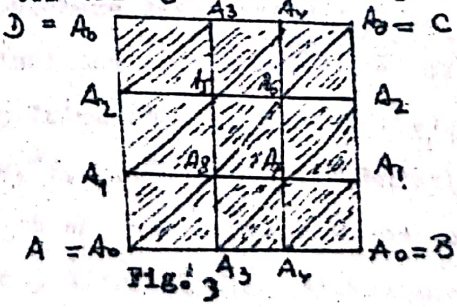


Fig. 3

Să observăm că dacă am considera următoarea triangulare a pătratului (Fig. 4), atunci făcînd identificările necesare obţinerii torului, nu se obţine un complex simplicial, deoarece, de exemplu, simplexele haşurate au în comun punctele A_4 şi A_4, care nu constituie un simplex.

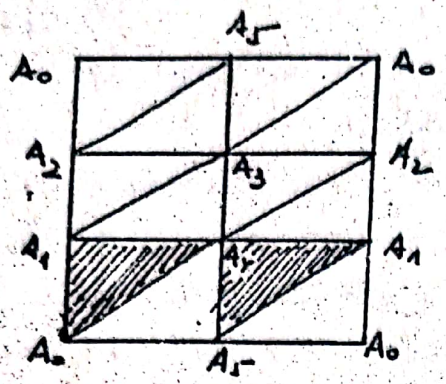


Fig. 4

Aceeași triangulare a pătratului ca în Fig. 3 ne dă, după identificările necesare, o triangulare a sticlei lui Klein, Fig. 5

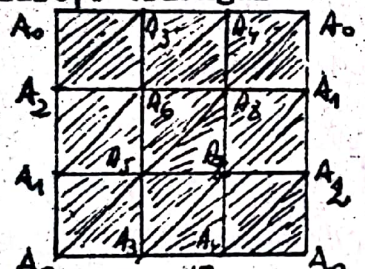


Fig. 5

2.9. Fie K complexul simplicial abstract 1-dimensional cu vîrfurile a^0, a^1, a^2, a^3, a^4 și oricare pereche de vîrfuri fiind un simplex abstract.

(a) Să se arate că nu există o realizare în R^2 a lui K.

(b) Să se generalizeze acest exemplu, la un complex simplicial n-dimensional abstract care nu are nici o realizare în R^{2n}.

Rezolvare (a). Presupunem contrariul, și fie K o realizare în R^2 a lui K, avînd vîrfurile $b^0, \ldots, b^4$. Acestea nu pot fi toate coliniare, deoarece orice pereche de vîrfuri trebuie să constituie un simplex. Mai mult, rezultă imediat că b^2, b^3, b^4 nu sînt situate pe dreapta b^0b^1. Atunci, două din punctele b^2, b^3, b^4, să luăm de exemplu b^2, b^3 sînt situate în același semiplan determinat de dreapta b^0b^1. Cum punctele b^0, b^2, b^3 nu sînt coliniare, putem presupune că b^3 este în interiorul unghiului $b^1b^0b^2$. Mai mult, deoarece segmentul b^0b^3 nu poate intersecta segmentul b^1b^2, rezultă

că b^3 este chiar în interiorul triunghiului $b^0b^1b^2$.Considerînd muchiile determinate de vîrfurile b^0,b^1,b^2,b^3 ,avem Fig. 6

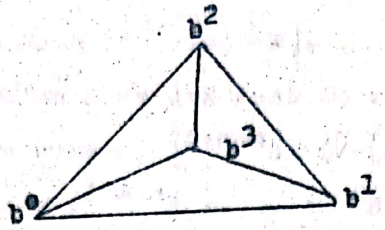


Fig. 6

Este clar că b^4 nu poate fi în exteriorul $\Delta b^0b^1b^2$,deoarece segmentul b^3b^4 ar intersecta o latură a acestui triunghi. Apoi,b^4 nu poate coincide cu b^3 ,sau să fie coliniar cu două din celelalte vîrfuri.Trebuie deci să fie situat în interiorul unuia din triunghiurile $b^0b^1b^3$,$b^0b^2b^3$,$b^1b^2b^3$.Ori, se clar că dacă,de exemplu,b^0 este în interiorul $\Delta b^0b^1b^3$,atunci segmentul b^2b^4 intersectează una din laturile acestui triunghi.Rezultă că b^4 nu poate fi situat în nici un punct din R^2 încît împreună cu celelalte vîrfuri să formeze un complex simplicial cu condiţiile cerute.

(b) Considerăm complexul simplicial abstract $\mathcal{K}$ avînd vîrfurile $a^0,a^1,\ldots,a^{2n+2}$ şi de dimensiune n,avînd drept n-simplexe orice sistem de n vîrfuri distincte.Presupunînd că există un complex simplicial K în R^{2n} ,de dimensiune n şi care să fie realizare geometrică pentru $\mathcal{K}$,fie $b^0,\ldots,b^{2n+2}$ vîrfurile lui K.Oricare n vîrfuri trebuind să formeze un simplex,rezultă că oricare n+1 vîrfuri sînt afin independente.Astfel putem presupune că $b^0,\ldots,b^{2n}$ sînt afin independente.Atunci scheletul n-dimensional al simplexului cu aceste vîrfuri este inclus în K.Analiza poziţiei vîrfurilor b^{2n+1} şi b^{2n+2} se face în cazul (a);astfel rezultă că b^{2n+1} trebuie să fie în interiorul simplexului $(b^0,b^1,\ldots,b^{2n})$ iar b^{2n+2} nu mai poate fi situat în nici un punct din R^{2n} cu condiţiile cerute.

2.10. Date complexele simpliciale K,L,M şi N şi aplicaţiile simpliciale $f:|K| \longrightarrow |M|$, $g:|L| \longrightarrow |N|$, să se arate că $f*g:|K*L| \longrightarrow |M*N|$ este de asemenea simplicială.

Rezolvare. Reamintim că dacă K*L este uniunea ("join"), atunci $|K*L| = \{((1-\lambda)y, \lambda z, \lambda) \in R^{n+m+1}\}$, pentru $y \in |K| \subset R^n$, $z \in |L| \subset R^m$, cu identificările $R^n \hookrightarrow R^{n+m+1}$, $y \longmapsto (y,0,0)$ şi respectiv $R^m \hookrightarrow R^{n+m+1}$, $z \longmapsto (0,z,1)$.

Aplicaţia f g este definită prin:

$(f*g)((1-\lambda)y, \lambda z, \lambda) = ((1-\lambda)f(y), \lambda g(z), \lambda)$.

Vîrfurile lui K*L sînt vîrfurile lui K şi ale lui L. Fie $v=(y,0,0)$. Atunci $(f*g)(v)=(f(y),0,0)$, care este de asemenea un vîrf al lui M*N, deoarece f(y) este vîrf al lui M.

In mod analog, dacă $v=(0,z,1)$, atunci $(f*g)(v)=(0,g(z),1)$, care este vîrf al lui M*N.

Fie acum $(a^{i_0},\ldots,a^{i_p},b^{j_0},\ldots,b^{j_q})$ un simplex al lui K*L, deci $(a^{i_0},\ldots,a^{i_p})$ un simplex în K şi $(b^{j_0},\ldots,b^{j_q})$ un simplex în L. Atunci $(f(a^{i_0}),\ldots,f(a^{i_p}))$ generează un simplex în M şi $(g(b^{j_0}),\ldots,g(b^{j_q}))$ subîntind un simplex în N, care arată că $((f(a^{i_0}),\ldots,f(a^{i_p}),g(b^{j_0}),\ldots,g(b^{j_q}))$ sînt vîrfuri ale unui simplex din M*N.

In sfîrşit, dacă $x=((1-\lambda)y, \lambda z, \lambda) \in |K*L|$, fie $y=\lambda_0 a^{i_0}+\ldots+\lambda_p a^{i_p}$, $z=\mu_0 b^{j_0}+\ldots+\mu_q b^{j_q}$. Atunci $f(y)=\lambda_0 f(a^{i_0})+\ldots+\lambda_p f(a^{i_p})$ şi $g(z)=\mu_0 g(b^{j_0})+\ldots+\mu_q g(b^{j_q})$

Pe de altă parte, avem $x=(1-\lambda)(\lambda_0 a^{i_0}+\ldots+\lambda_p a^{i_p})+$

$+\lambda(\mu_0 b^{j_0}+\ldots+\mu_q b^{j_q})$ şi $(f*g)(x)=$

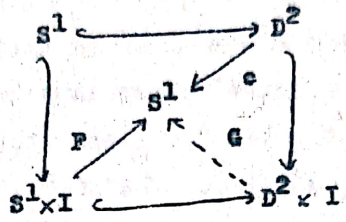
$=((1-\lambda)(f(a^{i_0})\lambda_0+\ldots+\lambda_p f(a^{i_p})), \lambda(\mu_0 g(b^{j_0})+\ldots+$

$\mu_q g(b^{j_q})), \lambda)=(1-\lambda)\lambda_0(f*g)(a^{i_0})+\ldots+(1-\lambda)\lambda_p(f*g)(a^{i_p})+$

$+\lambda\mu_0(f*g)(b^{j_0})+\ldots+\lambda\mu_q(f*g)(b^{j_q})$, care arată că în adevăr, f*g este aplicaţie simplicială.

2.11. Să se arate că perechea $(S^1, S^1-(1,0))$ nu are proprietatea de extensie absolută a omotopiei.

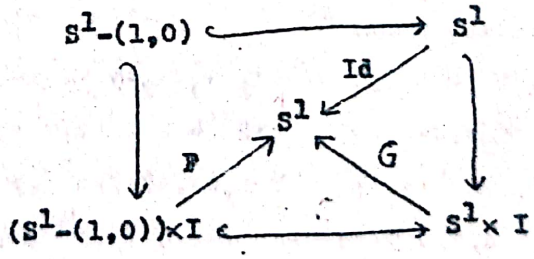
Rezolvare. Arătăm mai întîi că S^1 nu este spaţiu contractibil. Să presupunem contrariul, deci fie $F: S^1 \times I \longrightarrow S^1$, cu $F(z,0)=z_0$ şi $F(z,1)=z$, $\forall\, z \in S^1$. Considerăm diagrama



unde $c(d)=z_0$, $\forall\, d \in D^2$. Deoarece perechea (D^2, S^1) are proprietatea de extensie absolută a omotopiei (Teorema 2.4.1), există $G: D^2 \times I \longrightarrow S^1$, cu $G(z,t)=F(z,t)$, $\forall\, (z,t) \in S^1 \times I$ şi $G(d,0)=z_0$, $\forall\, d \in D^2$.

Fie atunci $r: D^2 \longrightarrow S^1$, $r(d)=G(d,1)$. Avem $r(z)=G(z,1)=F(z,1)=z$, care arată că r este o retracţie a lui D^2 în S^1, ceea ce contrazice Teorema 2.5.23 (vezi demonstraţia acesteia).

Să presupunem acum că perechea $(S^1, S^1-(1,0))$ are proprietatea de extensie absolută a omotopiei. Deoarece $S^1-(1,0)$ este un spaţiu contractibil, există $F: (S^1-(1,0)) \times I \longrightarrow S^1-(1,0)$, cu proprietăţile: $F(z,0)=z$ şi $F(z,1)=z_0 \neq (1,0)$. Fie diagrama:



unde G există în baza presupunerii făcute şi satisface $G(z,t)=F(z,t)$, $\forall\, (z,t) \in (S^1-(1,0)) \times I$ şi $G(z,0)=z$. Avem deci $G(z,1)=F(z,1)=z_0$, pentru $\forall\, z \in S^1-(1,0)$. Datorită continuităţii funcţiei G în punctul $((1,0),1) \in S^1 \times I$, avem $G((1,0),1)=z_0$. Rezultă că G este o contracţie în z_0 a lui S^1, ceea ce contrazice prima parte.

2.12. Fie $\sigma=(a^0,\ldots,a^n)$ un simplex al unui complex simplicial K. Să se arate că $st_K(\sigma)=st_K(a^0)\cap\ldots\cap st_K(a^n)$.

Rezolvare. Avem $st_K\,\sigma=\bigcup_{\sigma<\tau}\operatorname{Int}\tau$. Fie $x\in\operatorname{Int}\tau$, pentru $\sigma<\tau$. Avem atunci $a^0<\sigma<\tau$ şi deci $x\in st_K(a^0)$. Rezultă deci că $\operatorname{Int}\tau\subset st_K(a^0)$, care implică $st_K(\sigma)\subset st_K(a^0)$. Schimbînd a^0 cu un alt vîrf a^i, obţinem $st_K(\sigma)\subset st_K(a^i)$ şi deci $st_K(\sigma)\subseteq st_K(a^0)\cap\ldots\cap st_K(a^n)$. Fie acum $y\in st_K(a^0)\cap\cap st_K(a^1)\cap\ldots\cap st_K(a^n)$, care arată că $y\in\operatorname{Int}\tau_0\cap\operatorname{Int}\tau_1\cap\ldots\cap\operatorname{Int}\tau_n$, pentru $a^0<\tau_0, a^1<\tau_1,\ldots, a^n<\tau_n$. Intrucît interioarele a două simplexe distincte sînt disjuncte, rezultă că avem $\tau_0=\tau_1=\ldots=\tau_n=\tau$ şi $a^0,\ldots,a^n$ fiind vîrfuri ale acestuia, avem $\sigma<\tau$. Prin urmare $y\in st_K(\sigma)$.

2.13. Fie λ maximul lungimilor 1-feţelor unui simplex σ. Să se arate că λ este diametrul lui σ.

Rezolvare. Este evident că avem $\lambda\leq\operatorname{diam}(\sigma)$. Deoarece σ este un spaţiu compact, există două puncte $x_1,x_2\in\sigma$, astfel încît $d(x_1,x_2)=\operatorname{diam}(\sigma)$. Să presupunem că x_1 nu este un vîrf al lui σ, atunci există două puncte $y_1,y_2\in\sigma$, astfel încît $x_1\in(y_1y_2$ adică $y_1-x_1=\alpha_1 v$ şi $y_2-x_1=\alpha_2 v$, pentru $\alpha_1>0$, $\alpha_2<0$ şi v un vector nenul.

Atunci $(d(x_2,y_1))^2=\langle x_2-y_1,x_2-y_1\rangle=\langle x-(y_1-x_1),x-(y_1-x_1)\rangle=$
$=\langle x-\alpha_1 v,x-\alpha_1 v\rangle=\|x\|^2-2\alpha_1\langle x,v\rangle+\|v\|^2$ şi
$(d(x_2,y_2))^2=\|x\|^2-2\alpha_2\langle x,v\rangle+\|v\|^2$, pentru $x=x_2-x_1$.

Dacă $\langle x,v\rangle\geq 0$, atunci $(d(x_2,y_2))^2\geq\|x\|^2+\|v\|^2>\|x\|^2=$
$=(\operatorname{diam}(\sigma))^2$, ceea ce este absurd. In mod analog nu putem avea $\langle x,v\rangle\leq 0$, deoarece ar rezulta $d(x_2,y_1)>\operatorname{diam}(\sigma)$. Rezultă deci că x_1 este un vîrf al lui σ. In mod asemănător se deduce că şi x_2 trebuie să fie vîrf al lui σ.

2.14. Să se demonstreze că retracţia ρ definită în demonstraţia Teoremei 2.5.23 este continuă.

Demonstraţie.*) Dacă $f:E^n \longrightarrow E^n$ $(n \geqslant 1)$ este o aplicaţie continuă şi dacă $f(x) \neq x$, $\forall\, x \in E^n$, atunci se defineşte $\rho : E^n \longrightarrow S^{n-1}$ astfel: se consideră dreapta determinată de punctele x şi f(x), care intersectează sfera S^{n-1} în două puncte. Se ia drept $\rho(x)$ acela dintre aceste puncte care coincide cu x (dacă $x \in S^{n-1}$) sau pentru care x este în interiorul segmentului $(f(x), \rho(x))$ (Fig. 7)

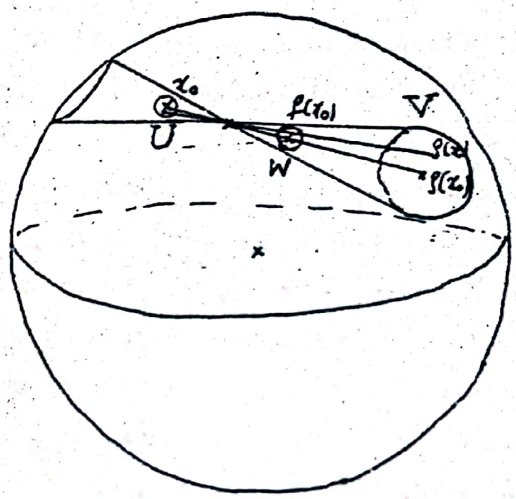


Fig. 7

Să arătăm că ρ este aplicaţie continuă. Fie $x_0 \in E^n$ şi fie V o vecinătate arbitrară a lui $\rho(x_0) \in S^{n-1}$. Putem presupune că V este intersecţia dintre S^{n-1} şi un disc din R^1, cu centrul în $\rho(x_0)$ şi de rază ε. Fie m mijlocul segmetului $(x_0, f(x_0))$ şi fie (c) conul cu vîrful în m şi care se sprijină pe frontiera lui V. Fie acum W o vecinătate deschisă a lui $f(x_0)$ care nu intersectează pe (c). Datorită continuităţii funcţiei f, există o vecinătate deschisă U a lui x_0, încît $f(U) \subset W$ şi putem presupune că U de asemenea nu intersectează (c). Dacă $x \in U$, atunci dreapta determinată de x şi f(x) este în interiorul lui (c) şi deci $\rho(x) \in V$. Prin urmare $\rho(U) \subset V$.

*) Vezi de asemenea Exerciţiul 1.6.

2.15. Fie (K,L) o pereche simplicială, unde dim K=n. Spunem că perechea (K,L) are proprietatea (M) dacă orice (n-1)-simplex al lui K-L este o faţă a unui număr par de n-simplexe ale lui K şi oricare (n-1)-simplex al lui L este faţă a unui număr impar de n-simplexe ale lui K. Să se arate că dacă perechea (K,L) are proprietatea (M), atunci aceeaşi proprietate o are şi perechea $((K,L)',L)$ şi mai general perechea $((K,L)^{(r)},L)$, pentru $r \geq 0$.

Rezolvare. Presupunem că perechea (K,L) are proprietatea (M). Fie $\sigma \in (K,L)'-L$, cu $\dim(\sigma)=n-1$. Conform Propoziţiei 2.5.10, avem $\sigma=(\hat{\sigma}_r,\ldots,\hat{\sigma}_1,a^0,a^1,\ldots,a^s)$, cu $r+s=n-1$, $\sigma_0=(a^0,\ldots,a^s)$ un simplex din L, iar $\sigma_r,\ldots,\sigma_1$ simplexe din K-L, astfel încît $\sigma_r > \sigma_{r-1} > \ldots > \sigma_1 > \sigma_0$.

Dacă s este fixat şi avem $\sigma_0 < \sigma^{s+1} < \ldots < \sigma^n$, cu $\dim \sigma^k = k$, atunci se obţine un simplex de tipul lui σ, dacă se omite unul din simplexele $\sigma^{s+1},\ldots,\sigma^n$. Cochidem că, dat simplexul σ, există $0 \leq i \leq r$, astfel încît $\dim(\sigma_{i+1})=\dim(\sigma_i)+2$ şi $\dim(\sigma_{j+1})=\dim(\sigma_j)+1$, pentru $j \neq i$.

Deosebim acum două cazuri:

1) $i=r$; 2) $i \neq r$.

In cazul 1), $\dim \sigma_r = s+r=n-1$. In acest caz, dacă σ' este un n-simplex din $(K,L)'$ pentru care σ este faţă, atunci $\sigma'=(\hat{\sigma}_{r+1},\hat{\sigma}_r,\ldots,\hat{\sigma}_1,a^0,\ldots,a^s)$, cu $\sigma_{r+1} \in K-L$, $\sigma_{r+1} > \sigma_r$, deci $\dim(\sigma_{r+1})=n$. Prin ipoteză, există un număr par de n-simplexe σ_{r+1} care au ca faţă pe σ_r. Prin urmare, există un număr par de simplexe σ' care au pe σ drept faţă.

In cazul 2) $\dim(\sigma_r)=s+r+1=n$. Există simplexele σ_i', σ_i'' de dimeniune egală cu $\dim(\sigma_i)+1$, astfel că $\sigma_i < \sigma_i' < \sigma_{i+1}$ şi respectiv $\sigma_i < \sigma_i'' < \sigma_{i+1}$. Putem considera atunci n-simplexele $\sigma'=(\hat{\sigma}_r,\ldots,\hat{\sigma}_{i+1},\hat{\sigma}_i',\hat{\sigma}_i,\ldots,\hat{\sigma}_1,a^0,\ldots,a^s)$ şi $\sigma''=(\hat{\sigma}_r,\ldots,\hat{\sigma}_{i+1},\hat{\sigma}_i'',\hat{\sigma}_i,\ldots,\hat{\sigma}_1,a^0,\ldots,a^s)$ care au

pe σ drept față. Un alt n-simplex cu această proprietate nu mai există, deoarece $\dim(\sigma_r)=n$ și în șirul $\sigma_r > \sigma_{r-1} > \dots > \sigma_1 > \sigma_0$ nu se mai pot intercala alte simplexe înafară de σ_i' și σ_i''.

Să verificăm acum condiția a 2-a din proprietatea (M). Dacă $\sigma=(a^0,a^1,\dots,a^{n-1})$ este un simplex din L, fie $\sigma'=(\hat{\tau},a^0,a^1,\dots,a^{n-1})$ un n-simplex care are pe σ ca față. Avem atunci $\tau > (a^0,a^1,\dots,a^{n-1})$ și deci $\dim(\tau)=n$. Prin ipoteză, sînt un număr impar de simplexe τ și deci un număr impar de simplexe σ'. Deci $((K,L)',L)$ are proprietatea (M). Presupunem că perechea $((K,L)^{(r-1)},L)$ are proprietatea (M). Avem însă $(K,L)^{(r)}=((K,L)^{(r-1)},L)'$ și deci $((K,L)^{(r)},L)=(((K,L)^{(r-1)},L)',L)$, care în baza ipotezei inductive și a celor demonstrate mai sus, are de asemenea proprietatea (M).

2.16. Fie (K,L) o pereche simplicială, cu $\dim K=n$ și $\dim L=n-1$. Să se arate că dacă perechea (K,L) are proprietatea (M), atunci $|L|$ nu este retractă a lui $|K|$.

Rezolvare. Presupunem că există o retracție $f:|K| \longrightarrow |L|$. Prin Teorema de aproximare simplicială 2.5.20, există o aproximare simplicială $g:|(K,L)^{(r)}| \longrightarrow |L|$ a lui f și astfel încît $g/|L| = f/|L| = Id$. Prin urmare g este o retracție și din Exercițiul 2.15, perechea $((K,L)^{(r)},L)$ are proprietatea (M). Prin urmare, putem presupune, fără a restrînge generalitatea că f este simplicială și $f/|L|=Id$.

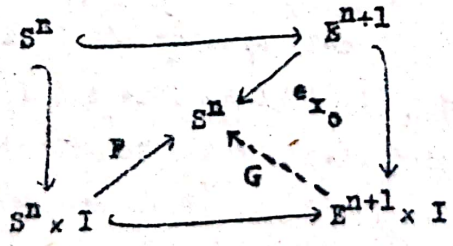
Fie $\sigma=(a^0,\dots,a^{n-1})$ un (n-1)-simplex din L și $\tau=(b^0,b^1,\dots,b^n)\in K$. Să presupunem că $f^{-1}(\hat{\sigma})\cap\tau\neq\phi$. Fie $x\in f^{-1}(\hat{\sigma})\cap\tau$. Avem $f(x)=\hat{\sigma}$ și $x\in\tau$, adică $f(x)\in f(\tau)$. Cum $f(\tau)$ este un simplex din L, rezultă că avem $f(\tau)=\sigma$. Prin urmare, putem presupune că avem $f(b^0)=a^0,\dots,f(b^{n-1})=a^{n-1}$ și $f(b^n)=a^{n-1}$.

Dacă $x=\sum_{r=0}^{n}\lambda_r b^r \Longrightarrow f(x)=\sum_{r=0}^{n-1}\lambda_r a^r+\lambda_n a^{n-1}$. Apoi, $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}a^r$ și deci avem $f(x)=\hat{\sigma}$ dacă și numai dacă $\lambda_1=\dots=\lambda_{n-2}=\frac{1}{n}$ și $\lambda_{n-1}+\lambda_n=\frac{1}{n}$.

Avem deci $x = \frac{1}{n}(b^0+\ldots+b^{n-2})+(\frac{1}{n}-\lambda_n)b^{n-1}+\lambda_n b^n =$
$= \frac{1}{n}(b^0+\ldots+b^{n-1})+\lambda_n(b^n-b^{n-1})$, $\lambda_n \in [0, \frac{1}{n}]$. Rezultă că $f^{-1}(\hat{\sigma})\cap\tau$ este segmentul ce unește punctele $\frac{1}{n}(b^0+\ldots+b^{n-1})$ și $\frac{1}{n}(b^0+\ldots+b^{n-2}+b^n)$ situate în interioarele(n-1)-fețelor $(b^0,\ldots,b^{n-1})$ și respectiv $(b^0,\ldots,b^{n-2},b^n)$ ale lui τ, de fapt baricentrul primului cu baricentrul celui de al doilea simplex. Rezultă că $f^{-1}(\hat{\sigma})$ este un arbore format din segmente unind baricentrele unor (n-1)-simplexe. Să precizăm acum că în baza ipotezei, dim L=n-1, există σ ca mai sus. Apoi $\hat{\sigma}\in f^{-1}(\hat{\sigma})$. De asemenea, L nu poate avea un singur n-1 simplex, altfel nu ar fi satisfăcută proprietatea (M). Mai mult, dacă τ este un n-simplex având pe σ ca față în mod necesar cel puțin încă o (n-1)-față a lui τ aparține lui L, fie aceasta σ'. Ori este clar acum că $\hat{\sigma}'\in f^{-1}(\hat{\sigma})$, adică, deși $\hat{\sigma}, \hat{\sigma}'\in|L|$, $\hat{\sigma}\neq\hat{\sigma}'$, avem $f(\hat{\sigma}')=\hat{\sigma}$, ceea ce contrazice faptul că $f/|L|=Id$.

2.17. Să se folosească Teorema 2.5.23 pentru a arăta că S^n nu este spațiu contractibil, pentru $n\geq 0$.

Rezolvare. Teorema 2.5.23 este Teorema de punct fix a lui Brouwer. In demonstrație se arată că S^n nu este retractă a lui E^{n+1}, $n>0$. Pentru n=0, S^0 nu este spațiu contractibil nefiind liniar conex. Presupunem deci $n\geq 1$ și că $1_{S^n}\simeq e_{x_0}$, prin omotopia F, ca în următoarea diagramă



Deoarece perechea (E^{n+1}, S^n) are proprietatea de extensie absolută a omotopiei, există $G: E^{n+1} \longrightarrow S^n$, cu $G(x,0)=x_0$ și $G(y,t)=F(y,t)$, $\forall x\in E^{n+1}$, $\forall y\in S^n$. Atunci $r: E^{n+1} \longrightarrow S^n$, definită prin $r(x)=G(x,1)$, este o retracție, contrar celor precizate.

[C]

1) .Un exemplu asemănător cu 2.4 se află în E.H.Spanier,Algebraic Topology,Mc Graw-Hill Book Company,1966 (Exemplul 9,Cap.I, la pg.40 în ediţia rusă);

2) .O altă triangulare,decît cea din 2.7,pentru RP^2 se obţine considerînd triangularea L din Exemplul 2.3.13,pentru sfera $S^2 = \{(x_1,x_2,x_3) / \sum_{i=1}^{3} |x_i|^2 = 1\}$,luînd complexul derivat L' şi identificînd în acesta punctele diametral opuse.Se obţine o triangulare cu 13 vîrfuri,etc.Metoda este mai generală şi se poate aplica şi pentru RP^n (vezi Exemplul 4.4.25);

3) .Exerciţiul 2.11 arată că $S^1-(1,0)$ nu este un poliedru (un subpoliedru a lui S^1);

4) .Complexele simpliciale abstracte şi realizările acestora (în legătură cu 2.9 sînt de asemenea studiate în P.J.Hilton and S. Wylie,Homology Theory,An introduction to Algebraic Topology, Cambridge Univ.Press,1960 (§ 1.9,Cap.I,la pag.49 în ediţia rusă

5) .O serie de proprietăţi ale perechilor topologice cu proprietatea de extensie absolută sau relativă a omotopiei se găsesc în E.H.Spanier (op.cit., § 4.Retracţii şi deformări în Cap.I la pg.42 în ediţia rusă).
Sînt intersante de asemenea,în legătură cu aceasta, spaţiile AR şi ANR;AE,ANE,HEP şi AHEP,pentru care se poate consulta S.T.Hu,Theory of Retracts,Wayne State Univ.Press,1965; K.Borsuk,Theory of Retracts,Warszawa,1967 sau S.Mardešić and J.Segal,Shape theory,North-Holand Publ.Co.,1982,§ 3,Cap.I.

6) .Noţiunea de complex simplicial abstract (Definiţia 2.3.14 poate fi definită şi fără restricţia ca numărul vîrfurilor (şi deci a simplexelor să fie finit (Să se compare şi cu Exerciţiul 7.11) Pentru un asemenea complex simplicial K,se defineşte $|K| = \{\alpha : K^0 \longrightarrow I=[0,1]\}$,astfel încît:
(a) pentru fiecare $\alpha \in |K|$,mulţimea $\{v \in K / \alpha(v) \neq 0\}$ reprezintă un simplex din K (în particular, inegalitatea $\alpha(v) \neq 0$ are loc numai pentru un număr finit de vîrfuri).
(b) pentru fiecare α are loc egalitatea $\sum_{v \in K} \alpha(v) = 1$.
$|K|$ se poate considera cu topologia dată de metrica următoare: $d(\alpha,\beta) = \sqrt{\sum_{v \in K} (\alpha(v) - \beta(v))^2}$ şi se obţine un spaţiu $|K|_d$.
Pe $|K|$ se poate considera de asemenea topologia slabă $|K|$ .Pentru K local finit,cele două spaţii coincid. K este comact dacă şi numai dacă,K este finit (vezi 2.6).In legătură cu acestea se poate consulta,de exemplu ,E.H.Spanier,Algebraic Topology,Mir,1971, Cap.3,sau C.Teleman,Elemente de topologie şi varietăţi diferenţiabile,EDP,Buc.1974,Cap.II,§ 16.

Capitolul 3. GRUPUL FUNDAMENTAL

3.1. Să se dea un exemplu de spaţiu X, cu două puncte bază x_0 şi x_1 astfel încît grupurile $\pi_1(X,x_0)$ şi $\pi_1(X,x_1)$ să nu fie izomorfe.

Soluţie. In mod necesar X trebuie să conţină cel puţin două componente liniar conexe, conţinînd pe x_0 şi respectiv x_1. Fie $X_0=S^1=\{z\in C/|z|=1\}$, $x_0=1$ şi $X_1=\{0\}\subset C$, (centrul cercului S^1) şi fie X reuniunea disjunctă $X_0\cup X_1$. Atunci $\pi_1(X,x_0)=\pi_1(X_0,x_0)\cong Z$ şi $\pi_1(X,x_1)=\pi_1(X_1,x_1)=0$, pentru $x_1=0$.

3.2. (a) Să se arate că orice mulţime deschisă şi conexă din R^n este liniar conexă;

(b) Orice poliedru conex este liniar conex;

(c) Orice spaţiu contractibil este liniar conex.

Rezolvare (a). Pentru n=1, afirmaţia este evidentă, deoarece orice mulţime conexă este un interval. Fie deci $n\geqslant 2$, cu $D\subset R^n$ deschisă şi conexă şi $x_0\in D$.

Notăm cu $D'_{x_0}=\{x\in D/\exists\ \alpha: I\longrightarrow X$, continuă, cu $\alpha(0)=x_0$ şi $\alpha(1)=x\}$ şi fie $D''_{x_0}=D-D'_{x_0}$. Este evident că $D'_{x_0}\neq\phi$. Dacă presupunem că D nu este liniar conexă, atunci avem şi $D''_{x_0}\neq\phi$ şi $D'_{x_0}\cap D''_{x_0}=\phi$ şi $D=D'_{x_0}\cup D''_{x_0}$. Arătăm că D'_{x_0} şi D''_{x_0} sînt ambele deschise, ceea ce va contrazice conexitatea lui D şi va implica deci că $D''_{x_0}=\phi$. Fie deci $x\in D'_{x_0}$. Există un disc cu centrul în x şi de rază ε, astfel că $\text{Int}\,E^n(x,\varepsilon)\subset D$. Deoarece $x\in D'_{x_0}$, este evident ca $\text{Int}\,E^n(x,\varepsilon)\subset D'_{x_0}$ şi prin urmare D'_{x_0} este mulţime deschisă. Fie acum $y\in D''_{x}$. Există ca şi mai sus, $\text{Int}\,E^n(y,\varepsilon')\subset D$ şi deoarece nu există un drum de la x_0 la y, deducem imediat că $\text{Int}\,E^n(y,\varepsilon')\subset D''_{x_0}$, deci şi D''_{x_0} este deschisă.

(b) Dacă avem un complex simplicial K, fie $\mathcal{L}$ o componentă liniar conexă a spaţiului $|K|$. Dacă pentru un simplex $s\in K$,

avem $s \cap \mathcal{L} \neq \phi$, rezultă că $s \subset \mathcal{L}$. Astfel $\mathcal{L}$ este o reuniune de simplexe. Dacă $s \in \mathcal{L}$ şi $s' < s$, rezultă $s' \in \mathcal{L}$. Obţinem astfel că $\mathcal{L}$ este un subpoliedru.

Fie spaţiul $|K|$ presupus conex şi să presupunem că avem $X = \mathcal{L}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{L}_p$, cu $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_p$ componente liniar conexe. Acestea fiind subpoliedre sînt submulţimi închise ale lui $|K|$. Fiind şi disjuncte, dacă presupunem $p > 1$, se contrazice conexitatea lui $|K|$.

(c) (Nu este în legătură cu (a) şi (b) şi afirmaţia a fost deja folosită în Exerciţiul 2.17, pentru a argumenta cazul n=0).

Fie $f: X \longrightarrow \{x_0\}$, $g: \{x_0\} \longrightarrow X$, cu $g(x_0) = x_0' \in X$. Avem $fg = 1_{x_0}$ şi $gf \simeq 1_X$. Fie $F: X \times I \longrightarrow X$, $F(x,0) = x$, $F(x,1) = x_0'$. Pentru un punct $x \in X$, arbitrar, definim drumul $\alpha_x: I \longrightarrow X$, prin $\alpha_x(t) = F(x,t)$. Atunci $\alpha_x(0) = x$ şi $\alpha_x(1) = x_0'$. Prin urmare orice punct x se află în componenta liniar conexă a lui x_0'.

3.3. Se consideră spaţiul X din Exerciţiul 2.4 şi fie $x_0 = (0,0)$. Atunci X şi x_0 au acelaşi tip omotopic, dar nu sînt echivalente omotopic ca spaţii cu punctul bază x_0.

Rezolvare. Din Exerciţiul 2.4, X este contractibil, deci are acelaşi tip omotopic ca şi $\{x_0\}$. Apoi, dacă $f': (X, x_0) \longrightarrow (x_0, x_0)$ ar fi o echivalenţă omotopică, ar rezulta că $f: (X, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$, $f(x) = x_0$, este omotopă cu $1_{(X, x_0)}$ contrar celor arătate în Ex. 2.4.

3.4. Date spaţiile X şi Y, cu punctele bază x_0 şi respectiv y_0, să se arate că $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ este izomorf cu suma directă a lui $\pi_1(X, x_0)$ şi $\pi_1(Y, y_0)$. (Aceasta este o altă demonstraţie a faptului că grupul fundamental al torului este grupul abelian liber cu doi generatori, deoarece torul este homeomorf cu $S^1 \times S^1$).

Rezolvare. Considerăm proiecţiile canonice

$p_1: (X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow (X, x_0)$ şi

$p_2: (X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow (Y, y_0)$. Acestea induc homomorfismele

$p_{1*}: \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ şi respectiv

$p_{2*}: \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$. Considerăm atunci homomorfismul:

$h: \pi_1(X\times Y,(x_0,y_0)) \longrightarrow \pi_1(X,x_0)\oplus\pi_1(Y,y_0)$,
definit prin $h([\omega])=(p_{1*}([\omega]),p_{2*}([\omega]))$, pentru $[\omega]\in\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))$.
De asemenea este bine definit următorul homomorfism:
$k: \pi_1(X,x_0)\oplus\pi_1(Y,y_0)\longrightarrow\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))$,
prin $k([\omega_1]),([\omega_2]))=[\omega]$, unde $\omega: I\longrightarrow X\times Y$,
cu $\omega(t)=(\omega_1(t),\omega_2(t))$. Dacă $\omega_1'\overset{P}{\simeq}\omega_1$ și $\omega_2'\overset{P}{\simeq}\omega_2$, atunci,
pentru ω ca mai sus și $\omega'(t)=(\omega_1'(t),\omega_2'(t))$, avem $\omega'\overset{H}{\simeq}\omega$
cu $H: I\times I\longrightarrow X\times Y$, definită prin $H(t,t')=(F(t,t'),G(t,t'))$.
Aplicația k este de asemenea un homomorfism cum se verifică imediat.
In sfîrșit: $k(h([\omega]))=k(p_{1*}([\omega]),p_{2*}([\omega]))=[\omega]$, deci $kh=1$ și în
mod analog avem $hk=1$. Așadar, h este izomorfism.

.5. Să se dovedească următoarea generalizare a Propoziției 3.3.3. Fie K un complex simplicial care colapsează pe un subcomplex L; atunci pentru orice subcomplex M, $(K,M)'\searrow L'$. Să se demonstreze de asemenea că $|L|$ este o retractă tare de deformare a lui $|K|$.

Rezolvare. Amintim că dacă avem un complex simplicial K și σ este un n-simplex al lui K, atunci o (n-1)-față a lui σ este față liberă dacă aceasta nu mai este față pentru nici un alt n-simplex. Dacă σ are fața liberă τ, atunci $K-\sigma-\tau$ este un subcomplex al lui K și trecerea de la K la $K-\sigma-\tau$ este numită colapsare elementară. Dacă L este un subcomplex al lui K, obținut ca rezultat al unor colapsări elementare, se scrie $K\searrow L$ și se spune: complexul K colapsează la L. Propoziția 3.3.3 dovedește afirmația din enunțul exercițiului în cazul cînd $\dim K=1,2$.

Este suficient să dovedim afirmația pentru o colapsare elementară. Fie deci $L=K-\sigma-\tau$, unde τ este o față liberă a lui σ. Se înțelege deci că L este subcomplexul simplicial al lui K, ce nu conține simplexele σ și τ. Dacă $\sigma\in M$, atunci prin divizarea baricentrică $(K,M)'$ simplexul σ și fețele sale nu sînt afectate, astfel încît este evident că în acest caz operațiile de colapsare și derivare comută. Să presupunem că $\sigma\notin M$ și fie $\sigma=(a^0,\dots,a^n)$ și

$\tau=(a^1,\dots,a^n)$. Considerăm $(K,M)'$ şi fie $t_1=(\hat{\sigma}_r,\dots,\hat{\sigma}_1,a^1,\dots,a^s)$, cu $r+s=n$, $\sigma_0=(a^1,\dots,a^s)\in M$ şi $\sigma_r,\dots,\sigma_1\in K-M$, încît $\sigma_r>\sigma_{r-1}>\dots>\sigma_1>\sigma_0$. Să presupunem că $t_1\subset\tau$. Ţinînd seama de Exerciţiul 2.15, rezultă că avem în mod necesar $\dim\sigma_r=n-1$ şi $\sigma_r=\tau$. Atunci t_1 este faţă liberă în $(K,M)'$ pentru $s_1=(\hat{\sigma},\hat{\sigma}_r,\dots,\hat{\sigma}_1,a^1,\dots,a^s)$. In adevăr, este clar că $t_1<s_1$; apoi, dacă avem s_1' un n-simplex cu $t_1<s_1'$, atunci $s_1'=(\hat{\sigma}',\sigma_r,\dots,\sigma_1,a^1,\dots,a^s)$, cu $\dim\sigma'\geq n$. Aceasta implică $\sigma\cap\sigma'\neq\phi$ şi $\hat{\sigma}_r=\hat{\tau}\in\sigma\cap\sigma'$, care arată că există $\sigma''<\sigma'$, $\dim\sigma''=n$ şi $\tau\subset\sigma\cap\sigma''$, ceea ce contrazice că τ este faţă liberă pentru σ. Putem considera prin urmare colapsarea elementară $(K,M)'\searrow(K,M)'-s_1-t_1$. Repetăm opsraţia pentru toate simplexele s_1,t_1 cu proprietăţile de mai sus şi obţinem o colapsare $(K,M)'\searrow K_1$, unde K_1 nu mai conţine nici un $(n-1)$-simplex inclus în τ şi nici un n-simplex cu un vîrf în $\hat{\sigma}$ şi avînd o $(n-1)$-faţă în τ. Fie acum $t_2\in K_1$ cu $\dim t_2=n-2$, $t_2\subset\tau$. Dacă $t_2=(\hat{\tau},\hat{\sigma}_{r-1},\dots,\hat{\sigma}_1,a^1,\dots,a^s)$, atunci t_2 este faţă liberă pentru $s_2=(\hat{\sigma},\hat{\tau},\hat{\sigma}_{r-1},\dots,\hat{\sigma}_1,a^1,\dots,a^s)$. In adevăr, avem $t_2<s_2$ şi, ca şi mai înainte t_2 nu poate fi faţă pentru un simplex de forma $s_2'=(\hat{\sigma}',\hat{\tau},\hat{\sigma}_{r-1},\dots,\hat{\sigma}_1,a^1,\dots,a^s)$. De asemenea nu mai sînt alte $(n-1)$-simplexe pentru care t_2 să fie faţă, deoarece acestea ar trebui să fie de forma $(\hat{\sigma}_r,\dots,\hat{\sigma}_1,a^1,\dots,a^s,a^{s+1})$ care sînt incluse în τ, dar care nu aparţin lui K_1.
Deci t_2 este faţă liberă pentru s_2 şi putem considera colapsarea elementară $K_1\searrow K_1-s_2-t_2$. Repetînd asta pentru toate simplexele s_2,t_2 obţinem o colapsare $K_1\searrow K_2$, unde K_2 nu mai conţine $(n-1)$-simplexe cu un vîrf în $\hat{\sigma}$ şi o $(n-2)$-faţă inclusă în τ şi nici aceste feţe din τ. După un număr finit de paşi vom obţine colapsările $(K,M)'\searrow K_1\searrow K_2\searrow\dots\searrow K_{n-s+1}$. Dar, în general, $K_{n-s+1}\neq(K-\sigma-\tau)'=L'$, însă se poate continua colapsarea pînă se obţine L'.

Pentru partea a 2-a, avem de arătat că dacă are loc $K \searrow L$, atunci $|L|$ este retractă tare de deformare pentru $|K|$. Putem presupune şi aici că avem $L=K-\sigma-\tau$. Fie $\sigma=(a^0,a^1,\ldots,a^n)$ şi $\tau=(a^0,a^1,\ldots,a^{n-1})$. Definim $r:|K| \longrightarrow |L|$ astfel: $r(x)=x$, dacă $x \in \overline{\sigma}$, $r(\hat{\tau})=a^n$ şi dacă $x \in \sigma$, cu $x=\sum \lambda_i a^i$, atunci

$$r(x)=(\lambda_0+n.\min\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\})a^0+\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-\min\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\})a^i.$$

Atunci $r/|L|=Id$ şi $ir \simeq Id$ prin $F:|K|\times I \longrightarrow |K|$, $F(x,t)=(1-t)x+tr(x)$.

3.6.* (a) Fie K un complex simplicial 1-dimensional încît $|K|$ este spaţiu simplu conex.

Să se arate că atunci K este colapsabil la un vîrf al său.

(b) Să se arate că orice complex simplicial K, de dimensiune doi, din R^2 este colapsabil pe un subcomplex 1-dimensional. In particular, cînd $|K|$ este simplu conex, K colapsează la un vîrf. (Totuşi, nu toate complexele simpliciale de dimensiune doi, contractibile, sînt colapsabile la un vîrf; vezi Exerciţiul 8.2).

Rezolvare. a) Pentru un vîrf $a^0 \in K$, avem $\pi_1(|K|,a^0)=0$. Fie L un arbore maximal al lui K. In baza Prop. 3.3.12 şi Teoremei 3.3.13, L trebuie să conţină toate 1-simplexele lui K, altfel, dacă un 1-simplex $(a^i,a^j) \in L$, atunci $\pi_1(|K|,a^0)$ ar conţine un subgrup nenul, generat de g_{ij}. Rezultă deci că avem K=L. Prin urmare, K este un arbore şi este evident că acesta colapsează la un vîrf.

(b) Evident, putem să presupunem că spaţiul $|K|$ este conex. Apoi, este suficient să arătăm că, complexul K are cel puţin un 2-simplex cu o faţă liberă. Fie pentru aceasta, σ un 2-simplex fixat şi $\hat{\sigma}$ baricentrul său. Considerăm o semidreaptă d cu originea în $\hat{\sigma}$ şi care nu trece prin nici unul din vîrfurile lui K. Atunci $d \cap |K|$ este mărginită şi închisă.

Există un punct $b \in |K| \cap \bar{d}$ încît distanța $d(\hat{\sigma}, b)$ este maximă. Există atunci un 1-simplex τ astfel încît $b \in \text{Int } \tau$. Dacă τ este față a unui 2-simplex al lui K, σ', atunci τ este față liberă. Dacă τ nu este față a nici unui 2-simplex, considerăm complexul $K_1 = K - \tau$ și repetăm raționamentul. Dacă am găsit un 2-simplex $\sigma' \in K_1$ având o față liberă τ', atunci τ' este față liberă pentru σ' și în K (deoarece acesta nu are 2-simplexe în plus). Este evident că procesul poate continua pînă se ajunge la σ, eventual. Există deci cel puțin o față liberă a unui 2-simplex. Se poate face colapsarea și se repetă raționamentul pentru noul complex (dacă acesta are tot dimensiunea doi), sau se aplică inducția.

Avem deci $K \searrow K_1$, cu $\dim K_1 = 1$. Cînd $|K|$ este simplu conex, din Exercițiul 3.5, partea a 2-a, rezultă că avem $|K_1|$ un spațiu simplu conex. După (*), avem atunci $K_1 \searrow a^0$. Deci $K \searrow a^0$.

3.7. Să se arate că spațiul proiectiv real n-dimensional RP^n poate fi triangulat identificînd punctele antipoldale în L', unde L este triangularea lui S^n din Exemplul 2.3.13; mai precis, formînd o realizare geometrică a complexului abstract format din abstractizarea lui L', identificînd orice vîrf $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ cu $(-x_1, \ldots, -x_{n+1})$. Fie σ un n-simplex al complexului simplicial rezultat M care are punctul $(0, \ldots, 0, 1) = (0, \ldots, 0, -1)$ ca un vîrf; să se arate că RP^{n-1} este homeomorf cu o retractă de deformare a lui $|M - \sigma|$ și să se conchidă că

$$\pi_1(RP^n) \cong \pi_1(RP^2) \cong Z_2, \quad \forall\, n \geq 2.$$

Rezolvare.

In R^{n+1} se consideră mulțimea tuturor punctelor $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ pentru care $\sum_{i=1}^{n+1} |x_i| = 1$. Această mulțime, notată $\bar{S}^n$, este homeomorfă cu sfera S^n, cum se constată imediat. In Exemplul 2.3.13 se consideră următoarea triangulare L a lui S^n:

Fie $a_i=(0,\ldots,\underset{i}{1},0\ldots,0)$ şi $a_i'=(0,\ldots,\underset{i}{-1},0\ldots,0)$, $i=1,\ldots,n+1$.

Atunci, simplexele lui L sînt $(b_{i_1},\ldots,b_{i_{r+1}})$, $i_1<i_2<\ldots<i_{r+1}$, $1\leq r\leq n$ şi $i_1,\ldots,i_{r+1}\in\{1,2,\ldots,n+1\}$, astfel că b_{i_s} este a_{i_s} sau a_{i_s}' (Fig. 8)

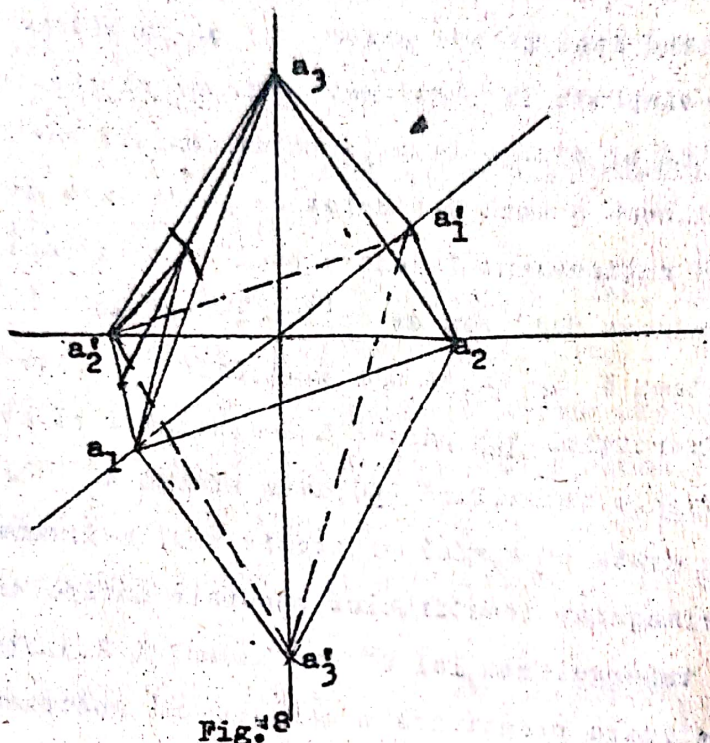


Fig. 8

Considerăm divizarea baricentrică L' a lui L. Avem de arătat că prin identificarea punctelor antipodale ale lui L' se obţine un complex simplicial M. Se observă că datorită simetriei fiecare simplex al lui L' se identifică chiar cu un simplex al lui L'. Prin urmare, prin identificarea punctelor antipodale se obţine o mulţime M de simplexe. (Un simplex din L' nu conţine puncte antipodale.) Este evident că faţa unui simplex din M este de asemenea un simplex din M. Rămîne să arătăm că intersecţia a două simplexe din M, dacă este nevidă, este un simplex din M. (De remarcat că acest lucru nu se întîmplă dacă nu se trece la divizarea baricentrică a lui L; de exemplu, dacă pentru un simplex σ din L notăm cu $[\sigma]$ simplexul rezultat prin identificarea antipodală, atunci $[(a_1,a_2)]\cap[(a_1,a_2')]=[a_1]\cup[a_2]$, cînd $n=2$).

Dacă σ şi τ sînt două simplexe din L' care se intersectează, atunci σ şi τ nu conţin puncte antipodale, cum se constată uşor şi prin urmare avem $[\sigma] \cap [\tau] = [\sigma \cap \tau]$.

Fie acum σ un n-simplex al lui M avînd ca un vîrf punctul $(0,..,0,1)=(0,...,0,-1)$. Fie L_1 subcomplexul lui L care este o triangulare pentru S^{n-1}. Atunci luînd complexul derivat L_1' şi identificînd punctele diametral opuse obţinem un subcomplex M_1 al lui M, care este o triangulare pentru RP^{n-1}.

Dacă $\sigma = [\tau] = \{\tau, -\tau\}$, unde $-\tau$ este simplexul antipodal cu τ în L', atunci $L' - \{\tau, -\tau\} \searrow L_1'$ cum se poate uşor constata. Rezultă atunci că $M - \sigma \searrow M_1$ şi, în baza Exerciţiului 3.5, că $|M_1|$ este retractă tare de deformare a lui $|M - \sigma|$. Cum $|M_1|$ este homeomorf cu RP^{n-1}, rezultă că acest ultim spaţiu este homeomorf cu o retractă (chiar tare) de deformare a lui $|M - \sigma|$.

Pentru n=2 rezultatul $\pi_1(RP^n) \cong Z_2$ a fost dovedit în Exemplul 3.3.4, utilizîndu-se Teorema 3.3.13. Dacă $n \geq 3$, atunci, după Corolarul 3.3.10, avem $\pi_1(RP^n, a^0) \cong \pi_1(|M^2|, a^0)$. Pe de altă parte $\pi_1(RP^{n-1}, a^0) \cong \pi_1(|M - \sigma|) \cong \pi_1(|(M-\sigma)^2|)$. Dar, pentru $n \geq 3$, avem $M^2 = (M-\sigma)^2$ şi prin urmare $\pi_1(RP^n, a^0) \cong \pi_1(RP^{n-1}, a^0)$. Dacă $n-1 \geq 3$ se repetă acest izomorfism şi obţinem în final $\pi_1(RP^n, a^0) \cong \pi_1(RP^2, a^0)$.

3.8. Fie $|K|$ un poliedru liniar conex. Să se arate că $\pi_1(|K| * S^0) = 0$

Rezolvare. Fie L un arbore maximal al lui K. Atunci $|L| * S^0$ este contractibil şi rezultă că $L * S^0$ este un arbore maximal pentru $K * S^0$. Fie $\{\sigma_{ij} = (a^i, a^j) \in K * S^0 \setminus L * S^0\}$. Avem pentru orice asemenea simplex, $\sigma_{ij} \in K - L$, deoarece $S^0 = \{1, -1\} \subset |L| * S^0$. Prin urmare, $\pi_1(|K| * S^0, 1)$ este generat de g_{ij}, corespunzător fiecărui σ_{ij}. Dar, deoarece $(1, a^i, a^j) \in K * S^0$, rezultă că g_{ij} = elementul neutru. Prin urmare, $\pi_1(|K| * S^0, 1) = \{e\}$, care arată că spaţiul $|K| * S^0$ este simplu conex.

3.9. Un grup topologic G este un grup care este de asemenea un spațiu topologic, încît funcțiile $m: G \times G \longrightarrow G$ și $u: G \longrightarrow G$ sînt continue, unde m este multiplicarea și $u(g)=g^{-1}, \forall g \in G$.
Date loop-urile v și w în G, cu punctul bază elementul neutru e, se definește $v*w$ prin $(v*w)(t)=m(v(t),w(t))(t \in I)$.
Să se arate că $v,w \simeq v*w \simeq w.v$ rel (0,1) și să se concludă că $\pi_1(G,e)$ este abelian.

Rezolvare. Considerăm următoarele echivalențe omotope:
$h^1: v \simeq v.\varepsilon_e$ rel (0,1),
$h^2: v \simeq \varepsilon_e.v$ rel (0,1),
$h^3: w \simeq \varepsilon_e.w$ rel (0,1),
$h^4: w \simeq w.\varepsilon_e$ rel (0,1).
Definim aplicațiile continue $h', h'': I \times I \longrightarrow G$ prin
$h'(t,t')=m(h^1(t,t'),h^3(t,t'))$ și $h''(t,t')=m(h^2(t,t'),h^4(t,t'))$.
Avem atunci $h'(t,0)=m(h^1(t,0),h^3(t,0))=m(v(t),w(t))=(v*w)(t)$,
$h'(t,1)=m(h^1(t,1),h^3(t,1))=m(v.\varepsilon_e^{(t)},\varepsilon_e.w_t))=$

$$= \begin{cases} m(v(2t),e), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ m(e,w(2t-1)), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} v(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ w(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} =$$

$=(v.w)(t)$. Apoi $h'(0,t')=m(h^1(0,t'),h^3(0,t'))=m(e,e)=e$ și $h'(1,t')=e$. Prin urmare $h': v*w \simeq v.w$ rel (0,1).
În mod analog rezultă că avem $h'': v*w \simeq w.v$ rel (0,1).
Partea a 2-a este evidentă.

3.10. Să se arate că, componentele liniar conexe ale unei n-varietăți sînt n-varietăți;
(b) Orice n-varietate conexă este liniar conexă.

Rezolvare:
(a) Fie M o n-varietate. Fiecare punct $x \in M$ are o vecinătate homeomorfă cu o mulțime deschisă din R^n. Fie L o componentă liniar conexă a lui M. Atunci L este spațiu Hausdorff și dacă $x \in L$, x are o vecinătate deschisă homeomorfă cu un disc deschis din R^n, fie aceasta V. Atunci V este liniar conexă și

și deci $V \subset L$.

(b)Dacă M este o n-varietate conexă, fie $x_0 \in M$ și definim submulțimile următoare:

$M'_{x_0} = \{x \in M / \exists u: I \longrightarrow M, u(0)=x_0, u(1)=x\}$, deci M'_{x_0} este componenta liniar conexă a lui x_0;

$M''_{x_0} = M - M'_{x_0}$. Avem $M = M'_{x_0} \cup M''_{x_0}$ și $M'_{x_0} \cap M''_{x_0} = \phi$. Mai mult, după (a), M'_{x_0} este deschisă. In mod analog arătăm că M''_{x_0} este deschisă: dacă $x \in M''_{x_0}$, există V homeomorfă cu un disc și vecinătate a lui x. Atunci $V \subset M''_{x_0}$. In sfîrșit, $M'_{x_0} \neq \phi$ și deoarece M este conexă, rezultă $M''_{x_0} = \phi$, care implică $M = M'_{x_0}$.

3.11. Fie X spațiul obținut dintr-un triunghi echilateral identificînd laturile sale ca în Fig. 9 a). Să se arate că X nu este 2-varietate (vezi și 8.2)

Rezolvare:

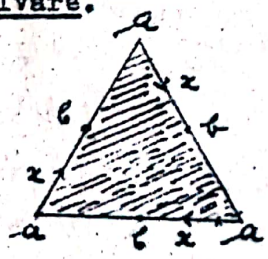


Fig. 9 a)

Fig. 9 b)

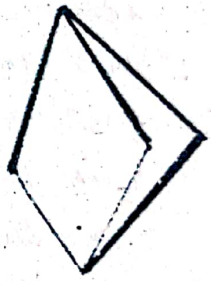


Fig. 9c)

Fie b punctul lui X obținut prin identificarea mijloacelor laturilor triunghiului. Atunci, orice vecinătate a lui b în X, considerat ca subspațiu al lui $\mathbb{R}^3$ este formată din trei "foi" și o putem presupune ca cea din Fig. 9b). Este acum ușor de arătat că nici o vecinătate U ca cea din Fig. 9b) nu este homeomorfă cu o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^2$. Prin reducere la absurd, putem presupune, eventual mai micșorînd pe U, că aceasta este homeomorfă cu un disc deschis f(U) din $\mathbb{R}^2$, cu centrul în f(b). Avem însă $\pi_1(U-\{b\}) \cong Z \oplus Z$, cum este sugerat în Fig. 9 c), în vreme ce $\pi_1(f(U)-f(b)) \cong Z$. Mulțimile U și f(U) nu pot fi homeomorfe.

3.12. Fie K o triangulare a unei 2-varietăți conexe. Să se arate că nu există un subcomplex al lui K (altul decît el însuși) a cărui poliedru să fie de asemenea o 2-varietate.

Rezolvare. Fie L un subcomplex al lui K, $L \subset K$. Dacă $\dim L \leq 1$, după Corolarul 3.4.4, L nu este 2-varietate. Vom presupune deci $\dim L = 2$. Avem L un subspaţiu închis al lui K. Apoi, $|L| \cap \overline{|K|-|L|} \neq \phi$, în caz contrar am avea $|K|-|L| = \overline{|K|-|L|}$ şi ar rezulta $|L|$ şi mulţime deschisă, contrar preupunerilor $|L| \neq \phi$, $|L| \neq |K|$ şi spaţiul $|K|$ fiind conex. Există deci $x \in |L| \cap \overline{|K|-|L|}$. Din Propoziţia 2.3.7, există un subcomplex M al lui K astfel încît avem $\overline{|K|-|L|} = |M|$. Rezultă prin urmare că $x \in |L| \cap |M|$. Complexul simplicial M constă din feţele lui K-L şi deci simplexele comune subcomplexelor L şi M sînt feţe proprii ale 2-simplexelor lui L. Dacă $x \in \operatorname{Int} \tau$, cu τ un 1-simplex din $L \cap M$, conform Corolarului 3.4.4, τ este faţă chiar a două 2-simplexe din K. Pentru ca $|L|$ să fie 2-varietate este necesar ca aceste 2-simplexe σ_1, σ_2 să fie din L. Dacă x este un vîrf comun 2-simplexelor $\sigma_1 \in L$ şi $\sigma_2 \in M$, atunci cum $|\operatorname{Lk}_K(x)| \simeq S^1$ şi, presupunînd $|L|$ de asemenea 2-varietate, $|\operatorname{Lk}_L(x)| \simeq S^1$, rezultă că muchia opusă τ lui x în σ_2 aparţine lui L. Dar atunci, deoarece $\tau \in L \cap M$, conform celor de mai sus, rezultă $\sigma_2 \in L$. Prin urmare dacă $|L| \cap \sigma \neq \phi$, atunci $\sigma \in L$, pentru orice 2-simplex. In felul acesta, L conţine toate 2-simplexele lui K. Dar atunci, fiind un subcomplex, conţine şi toate feţele acestora, deci $L = K$, contrar presupunerii făcute.

3.13. Fie K un complex simplicial de dimensiune 2 încît $|\operatorname{Lk}(a)|$ este conex pentru orice vîrf a şi orice 1-simplex al lui K este faţă chiar pentru două 2-simplexe. Să se arate că spaţiul $|K|$ este o 2-varietate.

Rezolvare. Condiţia de conexitate pentru $|\operatorname{Lk}(a)|$ exclude situaţii ca cea din Fig. 10

Fig. 10

Fie $x \in |K|$. Dacă x este în interiorul unui 2-simplex σ, atunci Int σ este o vecinătate deschisă a lui x homeomorfă cu un disc deschis din R^2. Dacă x este interior unui 1-simplex τ, atunci, în baza ipotezei, există două 2-simplexe σ_1 și σ_2 care au pe τ drept față. Este clar că și în acest caz x are o vecinătate homeomorfă cu un disc deschis din R^2 (vezi Fig.11)

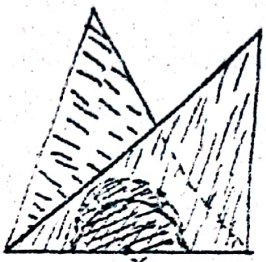


Fig.11

În sfîrșit, dacă x este un vîrf a al lui K, atunci putem considera vecinătatea sa deschisă st(a) (vezi Propoziția 2.4.3). Avem $st(a) = |N(a)| - |Lk(a)|$ (aceeași propoziție). Deoarece $|Lk(a)|$ este mulțime conexă, rezultă că $|N(a)|$ este homeomorf cu un disc, ceea ce implică st(a) homeomorf cu un disc deschis.

3.14. Fie X și Y două 2-varietăți triangulabile și fie $f: E^2 \longrightarrow X$, $g: E^2 \longrightarrow Y$ scufundări, adică homeomorfisme pe subspații. Fie e^2 subspațiul lui E^2 al punctelor x încît $\|x\| < 1$ și definim "suma conexă" a lui X și Y, notată $X \# Y$, ca fiind spațiul obținut din $X - f(e^2)$ și $Y - g(e^2)$ identificînd f(s) și g(s) pentru orice punct $s \in S^1$ (această definiție nu depinde de scufundările particulare f și g considerate). Să se arate că:

(a) $M_g \# M_1$ este homeomorf cu M_{g+1};

(b) $N_h \# M_1$ și $N_h \# N_2$ sînt ambele homeomorfe cu N_{h+2};

(c) $N_h \# N_1$ este homeomorf cu N_{h+1}.

Aceasta arată, de exemplu, că M_g poate fi considerat ca spațiul obținut prin "lipirea" unor toruri, ca în Fig.12

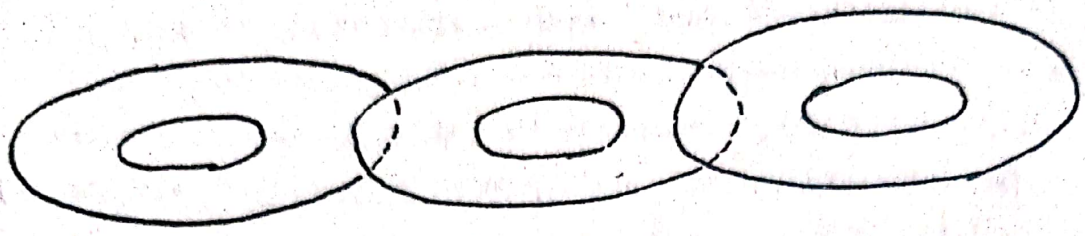


Fig.12

Rezolvare. Pentru a demonstra independenţa de scufundările f şi g a sumei conexe $X\#Y$, vom utiliza "Teorema discului" (vezi Completările de la sfîrşitul capitolului): Dacă $f,f':E^2 \longrightarrow X$ sînt două scufundări, atunci există un homeomorfism $F:X\times I \longrightarrow X\times I$ încît $F(f(u),0)=(f(u),0), \forall\, u\in E^2$ şi $F(f(u),1)=(f'(u),1), \forall\, u\in E^2$ sau $F(f(u),1)=((f\circ r_2)(u),1)$, pentru $r_2(t_1,t_2)=(-t_1,t_2)$.

Fie acum $f,f':E^2 \longrightarrow X, g,g':E^2 \longrightarrow Y$ scufundări. Există atunci $F:X\times I \longrightarrow X\times I, G:Y\times I \longrightarrow Y\times I$, homeomorfisme cu proprietăţi corespunzătoare "Teoremei discului". Fiind induse atunci homeomorfismele $F_1:X-f(e^2) \longrightarrow X-f'(e^2)$ şi $G_1:Y-g(e^2) \longrightarrow Y-g'(e^2)$, astfel că dacă $\theta:f(S^1) \longrightarrow g(S^1)$, $\theta':f'(S^1) \longrightarrow g'(S^1)$ sînt aplicaţiile $\theta(f(s))=g(s)$ şi respectiv $\theta'(f'(s))=g'(s)$, atunci $(G_1/g(S^1))\circ\theta = \theta'\circ(F_1/f(S^1))$. Rezultă un homeomorfism între spaţiile $(X-f(e^2))\cup_\theta (Y-g(e^2))$ şi $(X-f'(e^2))\cup_{\theta'}(Y-g'(e^2))$.

(a) Considerăm mai întîi cazul $g=0$ şi fie scufundările $f:E^2 \longrightarrow M_0=S^2$, $g:E^2 \longrightarrow M_1$ (Fig.13)

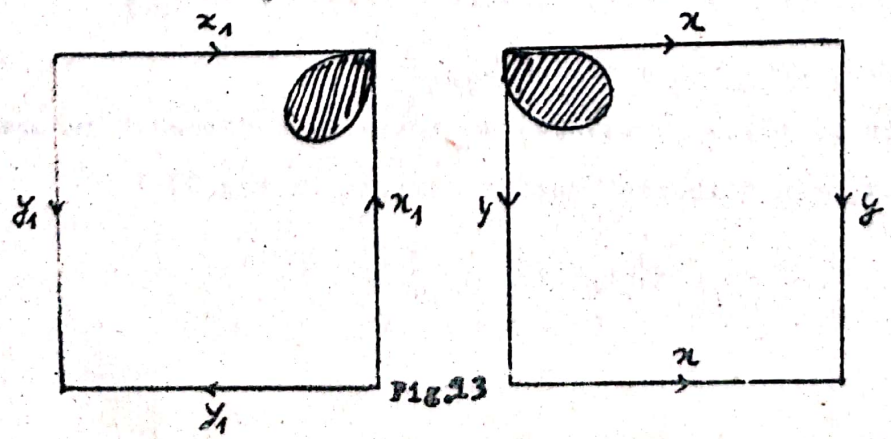


Fig.13

Spaţiile M_0-$f(s^2)$ şi M_1-$g(e^2)$ sînt reprezentate mai convenabil în Fig.14

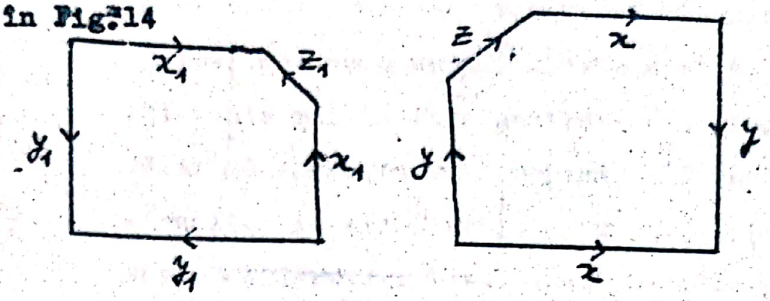


Fig.14

Spaţiul $M_0 \# M_1$ este obţinut identificînd z_1 cu z (şi, se înţelege, celelalte identificări indicate), Fig.15

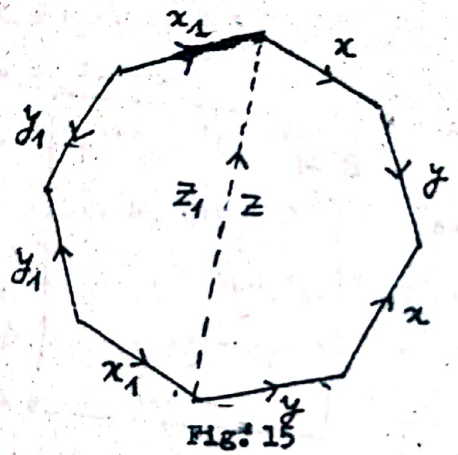


Fig. 15

Aplicăm pentru suprafaţa $x_1xyx^{-1}y^{-1}x_1^{-1}y_1y_1^{-1}$, Regula 3 (pg.93): $Axx^{-1}B$ sau $Ax^{-1}xB$ se înlocuieşte cu AB, dacă AB conţine cel puţin două litere (fiecare apărînd desigur de două ori. Obţinem suprafaţa $x_1xyx^{-1}y^{-1}x_1^{-1}$, care se mai scrie $xyx^{-1}y^{-1}x_1^{-1}x_1$ şi aplicînd din nouă Regula 3, se obţine suprafaţa $xyx^{-1}y^{-1}$, adică torul M_1. Prin urmare, $M_0 \# M_1$ este homeomorfă cu M_1.

Pentru $g \geq 1$, vom proceda în mod asemănător. Pentru două scufundări $f: E^2 \longrightarrow M_g$, $g: E^2 \longrightarrow M_1$ considerăm spaţiile M_g-$f(e^2)$ şi M_1-$g(e^2)$, care sînt reprezentate ca în Fig.16 a), b), iar spaţiul $M_g \# M_1$ se obţine identificînd z_1 şi z (Fig.17).

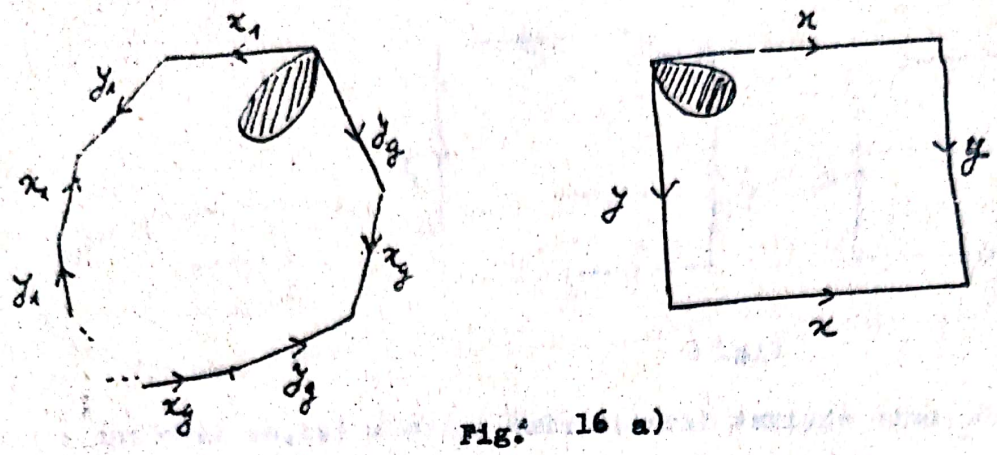


Fig. 16 a)

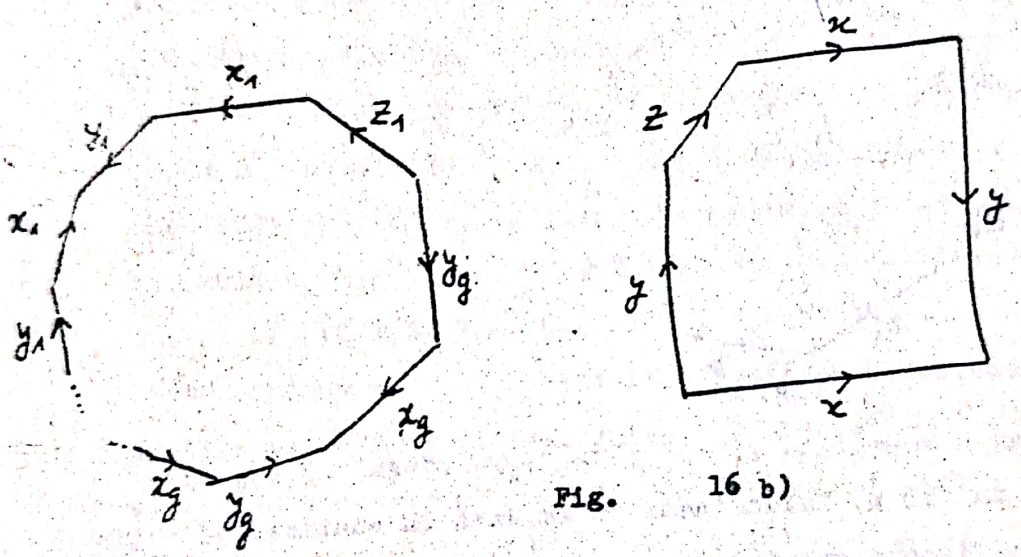


Fig. 16 b)

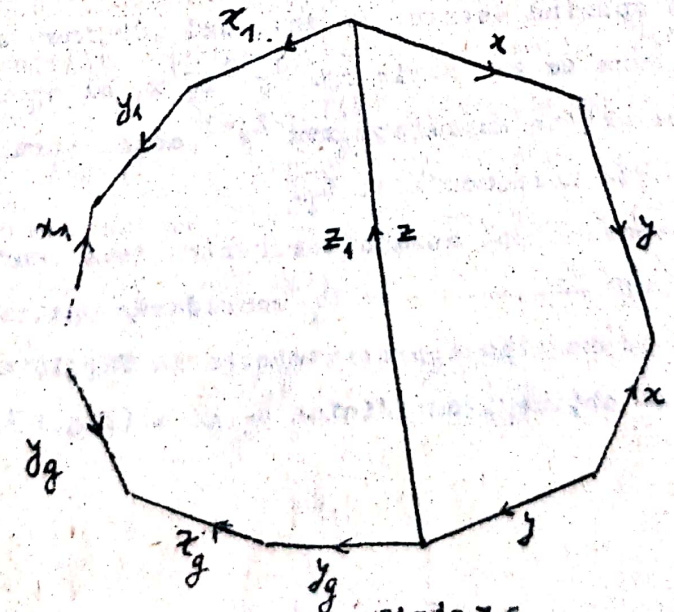


Fig. 17

Se obţine suprafaţa: $x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}\ldots\ x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}yxy^{-1}x^{-1}=M_{g+1}$.

(b) Vom face acum un calcul "simbolic", renunţînd la desene, utilizate mai înainte pentru intuiţie. Este uşor de văzut că simbolic suma conexă X#Y revine la juxtapunerea şirurilor de simboluri ale lui X şi respectiv Y.

Vom considera mai întîi cazul h=1. Vom mai nota prin Ri Regula i, i=1,2,3.

Avem $N_1\#M_1=x_1x_1y_1y_1^{-1}xyx^{-1}y^{-1}\overset{R3}{=}x_1x_1xyx^{-1}y^{-1}\overset{R3}{=}x_1x_1xx\,x^{-1}y\,x^{-1}y^{-1}\overset{R2}{=}xx_1xyx^{-1}y^{-1}\overset{R3}{=}N_3$.

Apoi $N_1\#N_2=x_1x_1\,y_1y_1^{-1}\,x_2x_2x_3x_3\overset{R3}{=}x_2x_1x_2x_2x_3x_3=N_3$.

Pentru h 2, avem:

$N_h\#M_1=x_1x_1\ldots\ x_hx_hxyx^{-1}y^{-1}\overset{R3}{=}x_1x_1\ldots\ x_hx_hxx\ x^{-1}yx^{-1}y$

$\overset{R2}{=}\ x_1x_1\ldots\ x_hx_hxxzzyy^{-1}\overset{R3}{=}N_{h+2}$

$N_h\#N_2=x_1x_1\ldots\ x_hx_hx_{h+1}x_{h+1}x_{h+2}x_{h+2}=N_{h+2}$

(c) $N_1\#N_1=x_1x_1y_1y_1^{-1}x_2x_2y_2y_2^{-1}\overset{R3}{=}x_1x_1x_2x_2=N_2$.

Pentru h 2, avem

$N_h\#N_2=x_1x_1\ldots\ x_hx_hxxyy^{-1}\overset{R3}{=}N_{h+1}$.

Rezumînd (a), (c), obţinem: Orice suprafaţă compactă este homeomorfă sau cu o sferă sau cu o sumă conexă de toruri sau cu o sumă conexă de plane proiective.

3.15. O 2-varietate cu bord este un spaţiu Hausdorff M în care orice punct are o vecinătate homeomorfă cu o mulţime deschisă în în semiplanul $x_1 \geq 0$ din R^2 şi Bordul (frontiera) lui M, notată ∂M, este subspaţiul lui M format din punctele care au vecinătăţi homeomorfe cu mulţimi deschise care intersectează dreapta $x_1=0$.

(a) Fie K un complex simplicial al cărui poliedru este o 2-varietate cu bord. Să se arate că pentru orice punct $x\in|K|$, $|Lk(x)|$ este echivalent homotopic cu S^1 sau cu un punct. Să se arate

că dim K=2.

(b).Să se arate că orice 1-simplex al lui K este față fie a unui 2-simplex,fie a două 2-simplexe.

(c).Dacă L este subcomplexul lui K al acelor 1-simplexe care sînt fețe exact pentru cîte un 2-simplex,împreună cu vîrfurile acestora atunci $|L| = \partial|K|$. Să se arate că $|L|$ este 1-varietate.

Rezolvare.*) (a)Dacă $x \in |K|$ are o vecinătate V homeomorfă cu o mulțime deschisă din R^2,atunci,ca în cazul 2-varietăților (vezi Propoziția 3.4.3) rezultă că $|Lk(x)| \approx S^1$.Dacă $x \in \partial|K|$,fie U deschisă în $R^2_+ = \{(x_1,x_2) \in R^2 / x_1 \geq 0\}$,încît U intersectează dreapta $x_1=0$ și astfel încît există un homeomorfism $h: U \longrightarrow h(U) \subset |K|$,pe o mulțime deschisă h(U) din $|K|$.Fie $y=h^{-1}(x)$.Există $\varepsilon > 0$ încît mulțimea $B_+ = \{(x_1, x_2)=z / x_1 \geq 0, d(y,z) \leq \varepsilon\}$ este conținută în U. Atunci $h:B_+ \longrightarrow h(B_+)$ este un homeomorfism.Dar B_+ poate fi triangulat (Fig. 18)

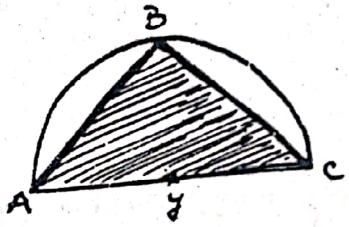


Fig.18

Avem $|Lk(y)| = (A,B) \cup (B,C)$,care este un spațiu contractibil. Prin Teorema 2.4.5, $|Lk_K(x)| \approx |Lk(y)|$ și deci $|Lk_K(x)| \approx \{pct\}$. Ca în demonstrația Corolarului 3.4.4,K nu poate avea simplexe de dimensiune > 2 deoarece dacă x ar fi în interiorul unui asemenea simplex,atunci $|Lk(x)| \approx S^{n-1}$,$n > 2$,ori pentru $n > 2$,sferele S^{n-1} și S^1 nu sînt echivalente omotopic.Deci dim $K \leq 2$.Apoi, dim $K \neq 0,1$,deoarece în caz contrar punctele din $|K|$ nu pot avea vecinătăți homeomorfe cu mulțimi deschise din R^2_+.Deci dim K=2.

(b)Fie τ un 1-simplex și fie $x \in \text{Int}\,\tau$.Atunci $|Lk(x)|$ este ca în Fig. 19 (deoarece dim K=2).Cum $|Lk(x)|$ este echivalent

*) Soluție dată de studenta SILVIANA TURCANU

omotopic cu S^1 sau cu pct. ,rezultă că τ poate fi față a unui 2-simplex sau a două 2-simplexe.Are loc prima situație,cf.cu (a), cînd $x \in |K| - \partial|K|$,iar cea de a 2-a cînd $x \in \partial|K|$.

Fig. 19

(c)Facem mai întîi observația că $\partial|K|$ este o submulțime închisă a lui $|K|$deoarece$|K| - \partial|K|$ este deschisă,cum rezultă imediat. Fie acum $\tau \in L$ și fie $x \in \text{Int}\,\tau$ .Atunci $|Lk(x)| \approx \{pct.\}$ și prin urmare $x \in \partial|K|$.Cum $\partial|K|$este închisă,rezultă că $\tau \subset \partial|K|$ și deci $|L| \subseteq \partial|K|$.Apoi,dacă $x \in \partial|K|$,avem $|Lk(x)| \approx \{pct.\}$ și rezultă prin urmare,fie $x \in \text{Int}\,\tau$,cu $\tau \in L$,care implică $x \in |L|$,fie că x este un vîrf și atunci este vîrf al unui 1-simplex din L, care iarăși induce $x \in |L|$.Avem deci și incluziunea $\partial|K| \subseteq |L|$. Să arătăm acum că $|L|$este o 1-varietate.Fie $x \in |L|$.Atunci $x \in \partial|K|$ și deci există U deschisă în R^2_+,care intersectează dreapta $x_1=0$ și un homeomorfism $h:U \longrightarrow h(U)$,cu $h(U)$ deschisă în $|K|$. Avem $R^2_+ = [0,\infty) \times R$,cu topologia produs.Atunci U conține un produs $U_1 \times U_2$,vecinătate pentru $h^{-1}(x)$,cu U_1 deschisă în $[0,\infty)$ și U_2 deschisă în R.Avem homeomorfismul $h:U_1 \times U_2 \longrightarrow h(U_1 \times U_2)$ și $h^{-1}(x)=(0,x_2)$,pentru $x_2 \in U_2$.Definim atunci

$$f:U_2 \longrightarrow h(U_1 \times U_2) \cap \partial|K|, f(x_2)=h(0,x_2'),\ \forall\ x_2' \in U_2.$$

Atunci f este un homeomorfism,U_2 este deschisă în R și $h(U_1 \times U_2) \cap \partial|K|$ este deschisă în $\partial|K|$.

3.16.Fie K un complex simplicial a cărui poliedru este o 2-varietate cu bord și fie L o componentă liniar conexă a lui $\partial|K|$;prin subdivizare,dacă este necesar,presupunem că orice 2-simplex al lui $|K|$ intersectează,dacă este cazul, L după o față.

1)Să se arate că subpoliedrul lui $|K|$ constînd din acele 2-simplexe care intersectează L este homeomorf cu spaţiul obţinut dintr-un poligon regulat în R^2 identificînd laturile conform cu un şir de simboluri de forma $aBa^{-1}C$, unde B şi C constau din cîte o singură literă (C poate şi lipsi).

2)Utilizînd poligoanele corespunzătoare la componentele liniar conexe ale lui $\partial|K|$, împreună cu celelalte 2-simplexe ale lui K, în modul în care 2-simplexele au fost folosite în demonstraţia Teoremei 3.4.5, şi aplicînd Regulile 1-3, să se arate că dacă $\partial|K|\neq\phi$ atunci K este homeomorf cu spaţiul corespunzător la un şir de simboluri de forma

$$a_1B_1a_1^{-1}\ldots\ a_rB_ra_r^{-1}x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}\ldots\ x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1} \quad (g\geq 0, r\geq 1) \text{ sau}$$

$$a_1B_1a_1^{-1}\ldots\ a_rB_ra_r^{-1}x_1x_1\ldots\ x_hx_h \quad (h\geq 1, r\geq 1),$$

unde $B_1,\ldots,B_r$ constau din cîte o singură literă.

3)Se notează spaţiile obţinute la 2)prin M_g^r şi respectiv N_h^r, astfel încît, de exemplu, M_g^r este M_g din care s-au înlăturat r discuri (vezi Fig. 20) în cazul M_1^1=torul cu un "hol")

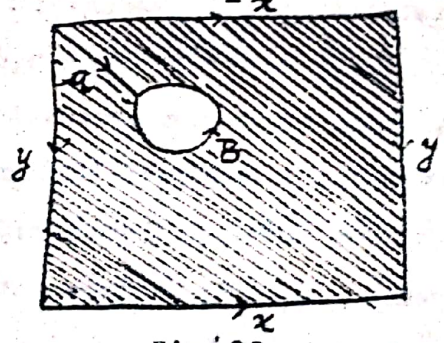


Fig. 20

Să se clasifice 2-varietăţile cu bord, pînă la homeomorfisme, stabilind următoarele patru propoziţii:

(a)Oricare din spaţiile M_g^r, N_h^r este o 2-varietate triangulabilă cu bord;

(b)Oricare două spaţii dintre M_g^r, N_h^r, M_g sau N_h care sînt homeomorfe trebuie să fie fără bord, sau ambele să aibă acelaşi r;

(c)Considerînd "abelianizatele" grupurilor fundamentale, spaţiile

M_g^r şi N_h^r sînt topologic distincte;

(d). Dacă M_g^r şi N_{2g}^r ar fi homeomorfe, atunci la fel ar fi M_g şi N_{2g}.

Rezolvare *)

1). Putem presupune (eventual făcînd subdivizări dacă este necesar) că sînt satisfăcute următoarele condiţii:

I. Orice 1-simplex din K, pentru care măcar un vîrf este în L este în întregime în K_L -complexul al cărui poliedru constă din toate 2-simplexele care intersectează pe L.

II. Orice 2-simplex nu are mai mult de un 1-simplex în K_L.

III. Oricare două 2-simplexe avînd fiecare cîte o muchie în K_L sînt sau disjuncte, sau au un vîrf comun conţinut în L (Fig.21)

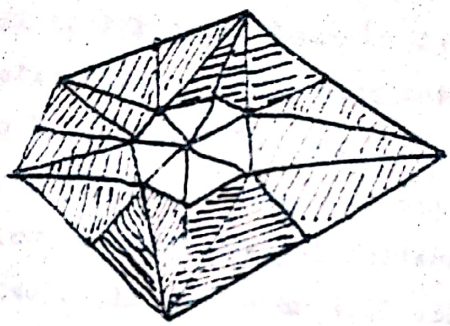


Fig.21

Dacă σ este un 2-simplex care intersectează pe L, atunci σ are două muchii avînd fiecare cîte un vîrf în L, dar care nu sînt conţinute în L. De asemenea, dacă τ este un 1-simplex care are un vîrf în L, dar nu este în întregime în L, atunci τ este faţă pentru două 2-simplexe, ambele intersectînd pe L. Rezultă că 1-simplexele şi 2-simplexele care intersectează pe L, pot fi aranjate în unul sau mai multe cicluri de tipul:

$\sigma_1, \tau_1, \sigma_2, \tau_2, \ldots, \sigma_n, \tau_n, \sigma_{n+1} = \sigma_1$, unde σ_i sînt 2-simplexe, iar τ_i sînt 1-feţe ale acestora, mai precis, τ_i este faţă comună

*) Soluţie dată de studenta SILVIANA TURCANU

pentru σ_j şi σ_{j+1}, iar σ_i are pe τ_{i-1} şi τ_i drept feţe. Prin urmare, un ciclu apare ca $aBa^{-1}C$, Fig. 22 a). Dar pot să apară mai multe cicluri, ca de exemplu $aBa^{-1}CbDb^{-1}E$, Fig. 22 b).

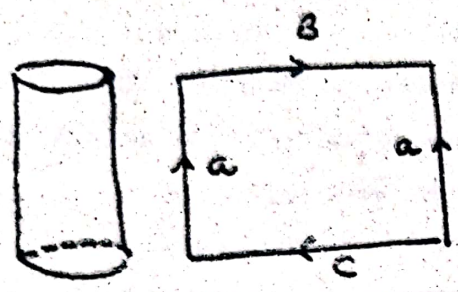


Fig. 22 a)

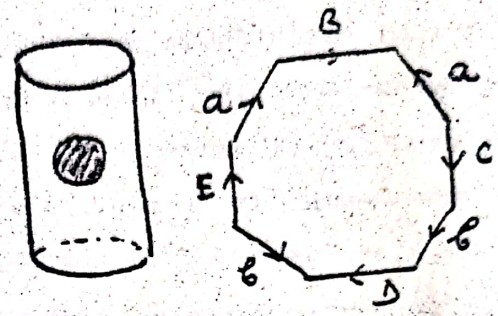


Fig. 22 b)

2). Este posibil, ca şi în cazul varietăţilor închise, ca poliedrul $|K_L|$ să fie reprezentat prin simboluri diferite. Putem însă utiliza şi în acest caz Regulile 1-3 (Teorema 3.4.6, pg. 93).

Fie L o componentă liniar conexă a lui $\partial|K|$. Atunci, prin 1), $|K_L|$ este homeomorf cu spaţiul obţinut dintr-un poligon regulat din R^2, identificînd laturile după un şir de simboluri $aBa^{-1}C$. În L sînt cuprinse, conform celor de mai sus numai 1-simplexele care sînt feţe pentru cîte un singur 2-simplex din K şi de asemenea orice 2-simplex nu are mai mult de o muchie în L. Celelalte două feţe ale unui asemenea 2-simplex sînt fiecare faţă pentru încă un 2-simplex. Ataşăm complexului K_L acest nou 2-simplex, continuînd pînă cînd se obţine un 2-simplex care intersectează o altă componentă conexă L_1 a lui $\partial|K|$. Ţinînd seama de demonstraţia Teoremei 3.4.7, deducem că poliedrul complexului obţinut corespunde unui şir admisibil

$$a_1B_1a_1^{-1}C_1\ldots a_gB_ga_g^{-1}C_gx_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}\ldots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}$$ sau

$$a_1B_1a_1^{-1}C_1\ldots a_gB_ga_g^{-1}C_gx_1x_1\ldots x_hx_h.$$

Considerînd în continuare complexul K_{L_1} constînd din toate 2-simplexele care intersectează pe L_1, obţinem poliedrul corespunzător şirului

a) $a_1B_1a_1^{-1}C_1 \ldots a_sB_sa_s^{-1}C_sx_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1} \ldots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}a_{s+1}B_{s+1}a_{s+1}^{-1}C_{s+1}$

$\ldots a_{s+p}B_{s+p}a_{s+p}^{-1}C_{s+p}x_{g+1}y_{g+1}x_{g+1}^{-1}y_{g+1}^{-1} \ldots x_{g+h}y_{g+h}x_{g+h}^{-1}y_{g+h}^{-1}$

sau şirului

b) $a_1B_1a_1^{-1}C_1 \ldots a_sB_sa_s^{-1}C_sx_1x_1 \ldots x_hx_ha_{s+1}B_{s+1}a_{s+1}^{-1}C_{s+1} \ldots$

$\ldots a_{s+m}B_{s+m}a_{s+m}^{-1}C_{s+m}x_{h+1}x_{h+1} \ldots x_{h+m}x_{h+m}$

Pentru a obţine din a) şirul din enunţul lui 2), arătăm că este valabilă regula următoare:

$a_1B_1a_1^{-1}xa_2B_2a_2^{-1}$ se înlocuieşte cu $a_1B_1a_1^{-1}a_2B_2a_2^{-1}x$, unde x este un şir de forma $x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1} \ldots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}$. Afirmaţia se demonstrează imediat procedînd ca în Fig.23

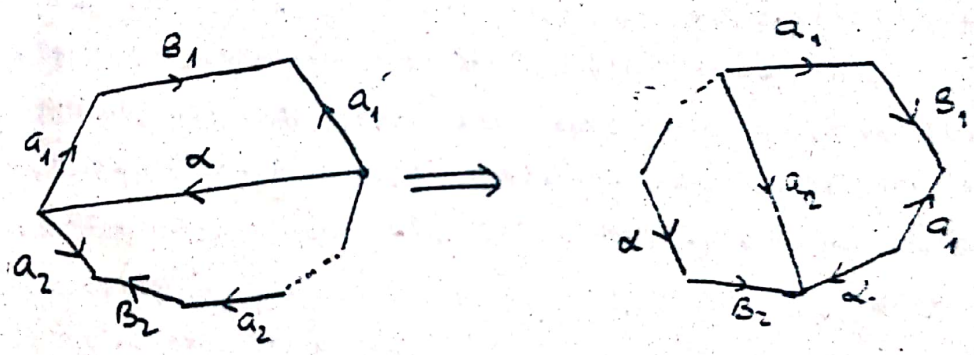


Fig.23

Aplicînd această regulă de mai multe ori obţinem un şir de forma

$a_1B_1a_1^{-1}C_1 \ldots a_{s+p}B_{s+p}a_{s+p}^{-1}C_{s+p}x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1} \ldots x_{g+h}y_{g+h}x_{g+h}^{-1}y_{g+h}^{-1}$.

In cazul b, aplicînd Regula 1 (pg.93), obţinem

$x_sx_sa_sB_sa_s^{-1}C_s \longrightarrow y_sC_s^{-1}a_sB_s^{-1}a_s^{-1}y_s \longrightarrow a_sB_sa_s^{-1}C_sx_sz_s$ şi

prin repetarea acesteia deducem şirul

$a_1B_1a_1^{-1}C_1 \ldots a_{s+m}B_{s+m}a_{s+m}^{-1}C_{s+m}x_1x_1 \ldots x_{h+m}x_{h+m}$.

3) (a) Fie M_g^r, $g \geq 0, r \geq 1$, obţinut ca mai sus dintr-un poligon regulat cu $3r+4g$ laturi. Un punct din M_g^r care provine din interiorul lui P are evident o vecinătate homeomorfă cu o mulţime deschisă din R^2. Fie acum A un punct provenit de pe frontiera lui P, diferit de un vîrf şi

care nu se află pe bordul lui M_g^r. Punctul A provine din identificarea a două puncte A_1 și A_2 de pe frontiera lui P. Alegem ε încît să existe ε-vecinătăți pentru A_1 și A_2 care intersectează cîte o singură latură a lui P. Prin identificare se obține o vecinătate pentru A, homeomorfă cu o deschisă din R^2. Dacă punctul considerat se află într-un B_s, atunci ... există o vecinătate a sa homeomorfă cu o mulțime deschisă din R^2_+. Mai rămîne cazul cînd A este un vîrf. Aici deosebim cazurile:

Punctul este vîrf pentru o muchie x_1 (și y_1) și în acest caz, ca și pentru varietăți fără bord, se deduce că punctul are o vecinătate homeomorfă cu un disc deschis din R^2, obținut din 4g sectoare.

Punctul este vîrf pentru o muchie B_s, atunci în M_g se obține din identificare a două puncte, situate pe a_s și a_s^{-1}. Prin considerarea a două ε-vecinătăți care să nu intersecteze decît cîte două laturi, se obține prin identificare un sector de cerc de unghi $< 2\pi$, deci homeomorf cu o mulțime deschisă din R^2_+.

(b) Să stabilim că avem

$$\pi_1(M_g^r) \cong G_p\left\{B_1,\dots,B_r,x_1,y_1,\dots,x_g,y_g;x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}\dots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}\right\}$$

și

$$\pi_1(N_h^r) \cong G_p\left\{B_1,\dots,B_r,x_1,\dots,x_h;x_1^2\dots x_h^2\right\}.$$

Aceastea rezultă în felul următor: M_g^r se obține identificînd unele perechi de muchii într-un poligon regulat cu 4g+3r laturi. Toate vîrfurile laturilor $x_1,y_1,x_1^{-1},\dots x_g,y_g,x_g^{-1},y_g^{-1}$ se identifică dînd un singur punct, scheletul 0-dimensional al lui M_g^r. Apoi, $a_nB_na_n^{-1}$ dau prin identificare cîte un cerc. Deci, scheletul 1-dimensional al lui M_g^r este un buchet de r+2g cercuri. Grupul fundamental al acestuia este grupul liber cu r+2g generatori. În sfîrșit, M_g^r se obține făcînd adjuncția unui disc, conform șirului $x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}\dots\dots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}$. Obținem rezultatul enunțat aplicînd Teorema 3.3.20.

Considerăm acum abelianizatele acestor grupuri fundamentale. Aplicînd rezultatele precedente şi Propoziţia 1.3.28, obţinem

$\pi_1(M_g^r)/[\pi_1(M_g^r),\pi_1(M_g^r)] \cong Ab\{x_1,y_1,\ldots,x_g,y_g,B_1,\ldots,B_r\} \cong$

$\cong \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}}_{2g+r \text{ ori}}$ şi

$\pi_1(N_h^r)/[\pi_1(N_h^r),\pi_1(N_h^r)] \cong Ab\{B_1,\ldots,B_r,x_1,\ldots,x_h;2(x_1+\ldots+x_h)\}$ şi

notînd $x_1+\ldots+x_h=y$, avem

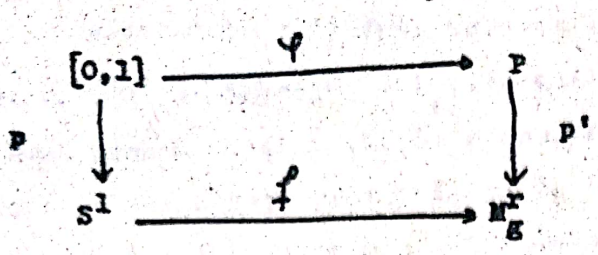
$\pi_1(N_h^r)/[\pi_1(N_h^r),\pi_1(N_h^r)] \cong Ab\{B_1,\ldots,B_r,x_1,\ldots,x_{h-1},y;2y\} \cong$

$\cong \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}}_{r+h-1 \text{ ori}}\oplus\mathbb{Z}_2$.

Rezultă clar că $\pi_1(M_g^r) \not\cong \pi_1(M_{g'}^{r'})$, pentru $(r,g)\neq(r',g')$ şi $\pi_1(N_h^r)\not\cong\pi_1(N_{h'}^{r'})$, $(r,h)\neq(r',h')$, precum şi $\pi_1(M_g^r)\not\cong\pi_1(N_h^{r'})$, $\forall\,(r,g)$, $\forall\,(r',h)$. Aşadar, spaţiile M_g^r şi $N_h^{r'}$ sînt topologic (chiar omotopic !) distincte. Nu putem avea de asemenea un homeomorfism între o varietate fără bord şi una cu bordul nevid, deoarece prin homeomorfisme se păstrează tipul de omotopie al "link"-ului unui punct şi pentru un punct de pe bord "link"-ul este echivalent omotopic cu un punct, în vreme ce pentru orice punct al unei 2-varietăţi închise "link"-ul este omotop cu S^1.

(d) Putem arăta că prin adjuncţia a r celule de dimensiune doi la oricare din 2-varietăţile M_g^r sau N_h^r se obţine o 2-varietate triangulabilă fără bord homeomorfă cu M_g şi respectiv N_h.

In adevăr, fie M_g^r reprezentat de şirul $a_1B_1a_1^{-1}\ldots\ a_rB_ra_r^{-1}x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}\ldots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}$. Considerăm aplicaţia $f:S^1\longrightarrow M_g^r$ definită astfel: fie P poligonul regulat din care obţinem pe M_g^r şi definim $\varphi:[0,1]\longrightarrow P$ astfel încît este un homeomorfism pe latura B_1. Deoarece S^1 se obţine din $[0,1]$ identificînd extremităţile, iar în M_g^r vîrfurile lui B_1 se identifică, se poate defini f încît să fie comutativă diagrama următoare



unde p şi p' sînt aplicaţiile canonice de identificare. Putem considera atunci adjuncţia M_g^r a unei 2-celule, cu ajutorul aplicaţiei f. Repetînd această construcţie şi pentru celelalte componente ale bordului lui M_g^r, obţinem o 2-varietate fără bord. Mai mult, aceasta este homeomorfă cu M_g, cum rezultă din clasificarea 2-varietăţilor fără bord şi din faptul că prin adjuncţiile considerate nu au fost afectate decît laturile $B_1, \ldots, B_r$ ale lui P. In mod analog, se poate obţine din N_h^r, prin adjuncţia a r celule de dimensiune doi un spaţiu homeomorf cu N_h. Este clar acum că dacă M_g^r şi N_{2g}^r ar fi homeomorfe, atunci prin adjuncţia la fiecare din acestea a cîte r celule de dimensiune doi, am obţine un homeomorfism între M_g şi N_{2g} (ceea ce de fapt nu se poate întîmpla !).

C

1) Exerciţiul 3.8 poate fi de asemenea rezolvat utilizînd Teorema lui Van Kampen, pentru care se poate consulta de exemplu: Claude Godbillon, Eléments de Topologie Algébrique, Herman, Paris, 1971, §4, Ch. VI, sau R. Miron & I. Pop, Topologie algebrică. Omologie, Omotopie, Spaţii de acoperire, Ed. Acad. RSR, Buc. 1974, §7, Cap. X.

2) "Teorema discului", utilizată în Exerciţiul 3.14 poate fi dată o n-varietate X, înlocuindu-se E^2 cu E^n (sub această formă este posibil să se adapteze necesităţilor Exerciţiului 5.15). O demonstraţie a acestei teoreme se află în Rourke & Sanderson, Introduction to Piecewise-Linear Topology, Springer-Verlag, 1982, Chapter 3.

3) Concluziile Exerciţiului 3.14 pot fi formulate în următoarea teoremă: Orice 2-varietate este homeomorfă sau cu o sferă, sau cu o sumă conexă de toruri, sau cu o sumă conexă de plane proiective. Sub această formă este enunţată teorema de clasificare pentru suprafeţe în W. S. Massey, Algebraic Topology : An Introduc-

tion, Springer-Verlag, 1967, Ch. I, § 9.

4). Exercițiul 3.14 poate fi aplicat și pentru clasificarea 2-varietăților cu bord și se obține următorul rezultat: orice 2-varietate cu bord este homeomorfă sau cu un disc cu un număr de "holuri", sau cu o sumă conexă de g toruri cu r "holuri", sau cu o sumă conexă de h plane proiective cu r "holuri". Afirmația dovedită la începutul Exercițiului 3.16, 3(d), este luată în mod obișnuit ca punct de plecare în clasificarea 2-varietăților cu bord, utilizînd clasificarea celor fără bord (vezi de exemplu W.S. Massey, op. cit. Ch. I, § 10).

5). Spațiul din Exercițiul 3.11 este triangulabil (un 2-complex simplicial), este simplu conex și nu este colapsabil (vezi Exercițiul 8.5). Rezultă din Exercițiul 3.6 că acest complex simplicial nu are o realizare în R^2.

6). Afirmațiile Exercițiului 3.10 sînt valabile și pentru varietăți cu bord.

7). Este de remarcat faptul că în Exercițiul 3.6 nu este necesară comutativitatea grupului topologic G. Este interesant din acest punct de vedere de făcut comparație cu cazul cînd G este un AHI (Cap. 8).

8). Un alt punct de vedere de a studia clasele de omotopie de drumuri într-un spațiu topologic X, este de a considera grupoidul fundamental πX al spațiului X, adică categoria ale cărui obiecte sînt punctele spațiului, iar morfismele de la x_0 la x_1 sînt clasele de omotopie de drumuri de la x_0 la x_1. Se poate consulta, de exemplu, Ronald Brown, Elements of Modern Topology, Mc Graw-Hill, 1968.
Un tip de rezultat în acest sens: Dacă $f: X \longrightarrow Y$ este o echivalență omotopică, atunci $\pi f: \pi X \longrightarrow \pi Y$ este o echivalență de grupoizi (deci de categorii). Dacă $x \in X$, atunci $\pi X(x)$ = mulțimea morfismelor de la x la x în grupoidul πX este grupul fundamental. Mai general, pentru o mulțime $A \subset X$, subcategoria plină a grupoidului πX pe mulțimea $A \cap X$ se notează $\pi X A$. Dacă, de exemplu $X = \mathrm{Int}\, X_1 \cup \mathrm{Int}\, X_2$ și $X_0 = X_1 \cap X_2$, iar $A \subset X$ intersectează orice componentă liniar conexă a lui X, atunci pătratul

$$\begin{array}{ccc} \pi X_0 A & \longrightarrow & \pi X_1 A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi X_2 A & \longrightarrow & \pi X A \end{array}$$

este "pushout" în categoria grupoizilor (op. cit. pp. 201, 206). Acest rezultat generalizează Teorema lui Van Kampen.

Capitolul 4. TEORIA OMOLOGIEI.

4.1. a) Să se arate că relaţia de a fi "lanţ-omotope" este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea aplicaţiilor de lanţuri de la un complex de lanţuri C la un complex de lanţuri D.

b) C şi D se numesc "lanţ-echivalente" şi $f:C \longrightarrow D$ o echivalenţă de lanţuri, dacă există o aplicaţie de lanţuri $g:D \longrightarrow C$ încît gf şi fg sînt lanţ-omotope cu izomorfismele de lanţuri identitate corespunzătoare. Să se arate că este o relaţie de echivalenţă.

Rezolvare. a) Dacă $f,g:C \longrightarrow D$ sînt două aplicaţii de lanţuri, notăm $f \overset{h}{\simeq} g$ sau $h:f \simeq g$ dacă acestea sînt lanţ-omotope cu omotopia de lanţuri h.

Reflexivitatea: $f \overset{h}{\simeq} f$, prin $h:C_n \longrightarrow D_{n+1}$ homomorfismul trivial, pentru orice n;

Simetria: dacă $h:f \simeq g$, atunci $g \simeq f$ prin omotopia de lanţuri $\bar{h}=-h$;

Tranzitivitatea: dacă $h_1:f \simeq g$ şi $h_2:g \simeq k$, atunci $f \simeq k$ prin $h=h_1-h_2$.

b) Reflexivitatea: $C \simeq C$ prin aplicaţia de lanţuri identitate Id.

Simetria: Dacă $C \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} D$, atunci $D \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} C$;

Tranzitivitatea: Fie $C \underset{g_1}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} D$, $D \underset{g_2}{\overset{f_2}{\rightleftarrows}} E$, atunci

$$C \underset{g_1g_2}{\overset{f_2f_1}{\rightleftarrows}} E.$$

4.2. Fie C, D două complexe de lanţuri. Se notează prin $[C,D]$ mulţimea claselor de aplicaţii de lanţuri omotope de la C la D.

a) Să se arate că dacă $f,g:C \longrightarrow D$ sînt două aplicaţii de lanţuri, atunci suma $(f+g)(c)=f(c)+g(c)$, $\forall\, c \in C$, se poate extinde la clasele de echivalenţă şi în raport cu această operaţie $[C,D]$ este grup abelian.

b1). Să se arate că grupul $[C,D]$ depinde pînă la un izomorfism numai de clasele de echivalenţă ale lui C şi D;

b2). Dacă X şi Y sînt spaţii topologice, atunci grupul $[S(X),S(Y)]$

depinde numai de tipul de omotopie al spaţiilor X şi Y.

b3) Dacă C este un complex de lanţuri cu C_n un grup abelian liber cu un generator şi $C_r=0$ dacă $r\neq n$, atunci $[C,D]\cong H_n(D)$.

Rezolvare. a) Dacă $[f_1]=[f]$ cu $h_1: f_1 \simeq f$ şi $[g_1]=[g]$, cu $h_2: g_1 \simeq g$, atunci $h_1+h_2: f_1+g_1 \simeq f+g$, aşa încît este bine definită operaţia $[f]+[g]=[f+g]$ în mulţimea $[C,D]$.

Axiomele de grup abelian se verifică acum imediat, folosind reprezentanţi.

b1). Fie echivalenţele de complexe de lanţuri $C_1 \underset{f_1}{\overset{f}{\rightleftarrows}} C$ şi $D_1 \underset{g_1}{\overset{g}{\rightleftarrows}} D$. Construim atunci aplicaţia $\Phi: [C,D] \longrightarrow [C_1,D_1]$ prin $\Phi([\ell])=[g_1 \ell f]$. Aceasta este bine definită: dacă $h: \ell_1 \simeq \ell$ atunci $g_1 \ell_1 f \simeq g_1 \ell f$ prin $g_1 h f$. Aplicaţia Φ este un homomorfism de grupuri: $\Phi([\ell_1]+[\ell_2])=\Phi([\ell_1+\ell_2])=[g_1(\ell_1+\ell_2)f]=[g_1\ell_1 f+g_1\ell_2 f]=\Phi([\ell_1])+\Phi([\ell_2])$. Homomorfismul Φ este chiar un izomorfism, avînd inversul $\Theta: [C_1,D_1] \longrightarrow [C,D]$ definit prin $\Theta([m])=[gmf_1]$.

b2) Dacă X, X_1, Y, Y_1 sînt spaţii topologice, încît au loc echivalenţele omotopice $X \simeq X_1$ şi $Y \simeq Y_1$, atunci au loc lanţ-echivalenţele $S(X) \simeq S(X_1)$ şi $S(Y) \simeq S(Y_1)$ şi se aplică b1).

b3) Fie complexul de lanţuri

$$C: \begin{cases} C_r=0, \text{ dacă } r \neq n \\ C_n\text{-grupul abelian liber cu generatorul } c. \end{cases}$$

Dacă $f: C \longrightarrow D$ este o aplicaţie de lanţuri, atunci $f_n(c) \in D_n$ şi $d(f_n(c))=f_n(d(c))$. Dar $d(c) \in C_{n-1}=0$, astfel că $d(f_n(c))=0$ şi deci $f_n(c)$ este un ciclu. Arătăm că este bine definită aplicaţia $\Phi: [C,D] \longrightarrow H_n(D)$ prin $\Phi([f])=[f_n(c)]$. In adevăr, dacă $[f]=[g]$, prin $h: f \simeq g$, atunci $f_n(c)-g_n(c)=d(h(c))+h(d(c))=d(h(c))$, care arată că avem egalitatea claselor de omologie $[f_n(c)]=[g_n(c)]$. Se verifică imediat că Φ este chiar un

homomorfism de grupuri.Arătînd că este un izomorfism,construind inversul său.Fie $\psi: H_n(D) \longrightarrow [C,D]$, cu $\psi([z_n])=[f]$, unde $f: C \longrightarrow D$ este homomorfismul de grupuri graduate cu $f_r: C_r=0 \longrightarrow D_r$ homomorfismul trivial pentru $r\neq n$ şi f_n fiind definit prin $f_n(c)=z_n$.De fapt f este o aplicaţie de lanţuri deoarece $df_r=f_{r-1}d$,$\forall$ r:pentru $r \neq n$ aceasta este evident,iar pentru r=n, $df_n(c)=d(z_n)=0$,după cum şi $f_{n-1}(d(c))=0$.
Aplicaţia ψ este bine definită,deoarece dacă $[z_n']=[z_n]$,adică $z_n'=z_n+d(y_{n+1})$,cu $y_{n+1} \in D_{n+1}$ şi dacă $f': C \longrightarrow D$ este homomorfismul construit cu z_n',atunci considerăm $h_r: C_r \longrightarrow D_{r+1}$, homomorfismul trivial pentru $r\neq n$ şi h_n fiind definit prin $h_n(c)=y_{n+1}$.Avem atunci,cum se constată imediat ,$dh+hd=f'-f$ şi deci $[f']=[f]$.Rezultă imediat că ψ este un homomorfism de grupuri. In sfîrşit, $\phi\psi([z_n])=\phi([f])=[f_n(c)]=[z_n]$,pentru orice $[z_n] \in H_n(D)$ şi deci $\phi\psi=Id$.Apoi, $\psi\phi([f])=\psi([f_n(c)])=[g]$, cu $g_r=0$,dacă $r\neq n$ şi $g_n(c)=f_n(c)$,adică $g_n=f_n$ şi deci g=f,care arată că $\phi\psi=Id$.

4.3. Fie X un spaţiu liniar conex cu punctul bază x_o.

a)Să se arate că se poate defini un homomorfism

$$h: \pi_1(X,x_o) \longrightarrow H_1(X)$$

asociind cu un loop u în $x_o \in X$ simplexul singular $u: \Delta_1 \longrightarrow X$.

b)Să se arate că h este surjectiv şi că nucleul său este subgrupul comutatorilor $[\pi,\pi]$ al grupului $\pi_1(X,x_o)$.Astfel $H_1(X)$ este izomorf cu "abelianizatul" grupului $\pi_1(X,x_o)$,adică cu $\pi_1(X,x_o)/[\pi,\pi]$.

Rezolvare.a).Avem de arătat mai întîi că dacă $u: I \longrightarrow X$ este un loop în $x_o \in X$,adică $u(0)=u(1)=x_o$,atunci identificînd I cu Δ_1,simplexul singular $u: \Delta_1 \longrightarrow X$ este un 1-ciclu. In adevăr,avem $\partial u=u\circ F^0-u\circ F^1$,cu $F^0,F^1: \Delta_0 \longrightarrow \Delta_1$ date de $F^0(\Delta_0)=1$ şi $F^1(\Delta_0)=0$.Atunci :$(u\circ F^0)(\Delta_0)=u(1)=x_o$ şi $(u\circ F^1)(\Delta_0)=u(0)=x_o$,care arată că $u\circ F^0=u\circ F^1$ şi prin urmare $\partial u=0$.
Aşadar $u \in Z_1(X)$.Vom arăta că este bine definită aplicaţia

$$h: \pi_1(X,x_0) \longrightarrow H_1(X),$$

prin $h([u])=\{u\}$. In adevăr, fie $[v]=[u] \in \pi_1(X,x_0)$ prin omotopia $F: I \times I \longrightarrow X$, cu $F(t,0)=u(t)$, $F(t,1)=v(t)$, $F(0,t')=F(1,t')=x_0$. Definim aplicaţia $\lambda : \Delta_2 \longrightarrow X$ astfel: $\lambda(a^0)=x_0$, iar dacă $A \neq a^0$, considerăm A' ca în Fig. 24 .

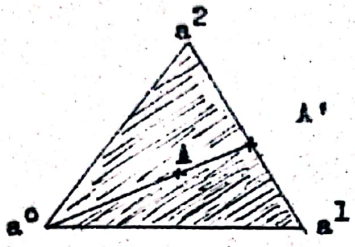


Fig. 24

Avem:

$A=sA'+(1-s)a^0$ şi $A'=ta^2+(1-t)a^1$; $s,t \in [0,1]$.

Luăm atunci $\lambda(A)=F(s,t)$. Aplicaţia λ este continuă datorită continuităţii aplicaţiei F şi faptului că dacă $A \longrightarrow a^0$ atunci $(s,t) \longrightarrow (0,t)$ şi $F(0,t)=x_0=\lambda(a^0)$.

λ este un 2-simplex singular în I şi frontiera sa este:

$\partial(\lambda)=\lambda \circ F^0 - \lambda \circ F^1 + \lambda \circ F^2$.

Avem apoi:

$(\lambda \circ F^0)(sb^0+(1-s)b^1)=\lambda(sa^1+(1-s)a^2)=F(1,s)=x_0$;

$(\lambda \circ F^1)(sb^0+(1-s)b^1)=\lambda(sa^0+(1-s)a^2)=F(s,1)=v(s)$;

$(\lambda \circ F^2)(sb^0+(1-s)b^1)=\lambda(sa^0+(1-s)a^1)=F(s,0)=u(s)$.

Prin urmare avem:

$\partial(\lambda)=\varepsilon_{x_0}-v+u$.

Considerînd simplexul singular constant $\lambda_0 : \Delta_2 \longrightarrow I$, $\lambda_0(\Delta_2)=x_0$, avem $\varepsilon_{x_0}=\partial(\lambda_0)$, astfel încît am obţinut: $u-v=\partial(\lambda-\lambda_0)$, care arată că avem $\{u\}=\{v\}$ în $H_1(X)$.

Să arătăm acum că h este un homomorfism de grupuri. Pentru aceasta avem de dovedit că $\{u.v\}=\{u+v\}$, unde

$$(u.v)(t)=\begin{cases} u(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ v(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

sau, echivalent, că $u+v-u.v=\partial(\mu)$, pentru un 2-lanț μ pe X.
Mai precis, putem să construim un 2-simplex singular μ care satisface relația de mai sus. Anume, definim $\mu : \Delta_2 \longrightarrow X$ prin:

$\mu((1-t)a^0+ta^1)=u(t)$,
$\mu((1-t)a^0+ta^2)=(u.v)(t)$,
$\mu((1-t)a^1+ta^2)=v(t)$, (Fig.25)

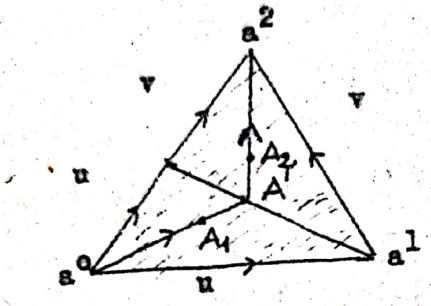


Fig. 25

Dacă $A_1=(1-t)a^0+tA'$, $\mu(A_1)=u(t)$, iar dacă
$A_2=(1-t)A'+ta^2$, $\mu(A_2)=v(t)$.
Aplicația μ este continuă și frontiera sa este:
$\partial(\mu)=\mu\circ F^0-\mu\circ F^1+\mu\circ F^2$, unde:
$(\mu\circ F^0)((1-t)b^0+tb^1)=\mu((1-t)a^1+ta^2)=v(t)$, deci $\mu\circ F^0=v$,
$(\mu\circ F^1)((1-t)b^0+tb^1)=\mu((1-t)a^0+ta^2)=(u.v)(t)$, deci $\mu\circ F^1=u.v$,
$(\mu\circ F^2)((1-t)b^0+tb^1)=\mu((1-t)a^0+ta^1)=u(t)$, adică $\mu\circ F^2=u$.
Obținem deci $\partial(\mu)=v-(u.v)+u$, care arată că h este homomorfism.
b) Fie acum $[z]\in H_1(X)$, cu $z=\sum_i n_i\lambda_i$ un 1-ciclu, λ_i fiind simplexe singulare $\lambda_i: \Delta_1 \longrightarrow X$, iar $n_i\in Z$.
Avem $0=\partial z=\partial(\sum_i n_i\lambda_i)=\sum_i n_i\partial(\lambda_i)$, cu $\partial(\lambda_i)=\lambda_i F^0-\lambda_i F^1=$
$=\lambda_i(1)-\lambda_i(0)$. Prin urmare:
$\sum_i n_i(\lambda_i(1)-\lambda_i(0))=0$, deci după reducerea termenilor asemenea toți coeficienții sînt nuli. Deoarece X este liniar conex putem alege drumurile în X: η_{io} de la x_0 la $\lambda_i(0)$ și η_{i1} de la x_0 la $\lambda_i(1)$, care să nu depindă de indice (adică, de exemplu dacă $\lambda_i(0)=\lambda_j(1)$, atunci $\eta_{io}=\eta_{j1}$) Fig. 26

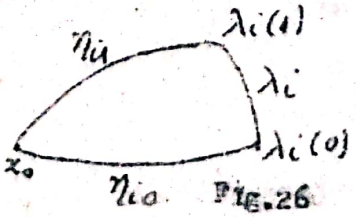


Fig. 26

Rezultă că avem $\sum_i n_i(\eta_{i1}-\eta_{i0})=0$. Considerăm acum 1-lanţurile $\beta_i = \eta_{i0}+\lambda_i-\eta_{i1}$. Avem atunci $z=\sum_i n_i\lambda_i = \sum_i n_i(\beta_i-\eta_{i0}+\eta_{i1})$ şi ţinînd seama de relaţia de mai sus, deducem că avem $z=\sum_i n_i\beta_i$.

Corespunzător 1-ciclurilor β_i putem considera loop-urile $\gamma_i=\eta_{i0}\lambda_i\eta_{i1}^{-1}$ şi deoarece h este homomorfism, avem $h([\gamma_i])=\{\beta_i\}$ care implică că luînd $u=\prod_i[\gamma_i]^{n_i}$, avem $h(u)=\{z\}$, şi deci h este epimorfism.

Să arătăm acum că avem $\operatorname{Ker} h=[\pi,\pi]$.

Mai întîi, dacă $[u],[v]\in\pi_1(X,x_0)$, atunci $h([u][v][u]^{-1}[v]^{-1})=\{u\}+\{v\}-\{u\}-\{v\}=0$, care arată că avem $[\pi,\pi]\subseteq \operatorname{Ker} h$.

Considerăm homomorfismul $\bar{h}:\pi_1(X,x_0)/[\pi,\pi]\longrightarrow H_1(X)$ definit prin $\bar{h}([u]+[\pi,\pi])=\{u\}$, corect definit în baza observaţiei de mai sus. Arătăm că $\bar{h}$ este monomorfism. Fie pentru aceasta $\bar{h}([u]+[\pi,\pi])=0$, adică $\{u\}=0$, care implică $u=\partial(\sum_i n_i\mu_i)$, cu $\mu_i:\Delta_2\longrightarrow X$ simplexe singulare. Avem

$u=\sum_i n_i\partial(\mu_i)=\sum_i n_i(\mu_i\circ F^0-\mu_i F^1+\mu_i F^2)$, pe care o scriem:

$u=\sum_i n_i(\mu_{i0}-\mu_{i1}+\mu_{i2})$, cu $\mu_{i0},\mu_{i1},\mu_{i2}$ drumuri (sau 1-simplexe singulare) în X. Alegem drumurile η_{ij}, $j=0,1,2$ în X de la x_0 respectiv la $\mu_{i2}(0)$, $\mu_{i0}(0)$ şi $\mu_{i1}(0)$, Fig. 27

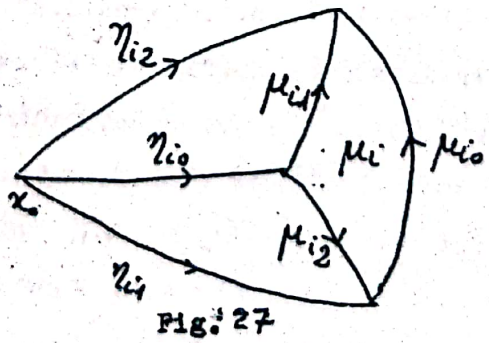


Fig. 27

Ca şi anterior, drumurile η_{ij} depind numai de puncte şi nu de indici. Putem considera acum drumurile:

$\beta_{io}=\gamma_{il}\mu_{io}\eta_{i2}^{-1}$, $\beta_{il}=\eta_{io}\mu_{il}\eta_{i2}^{-1}$ şi $\beta_{i2}=\eta_{io}\mu_{i2}\eta_{il}^{-1}$.

Luînd atunci $\beta_i=\beta_{io}\beta_{il}^{-1}\beta_{i2}$, deducem că $\beta_i \simeq \varepsilon_{x_o}$ rel $\dot{I}$.

Prin urmare:
$\prod_i [\beta_i]^{n_i}=1$, care implică $\prod_i ([\beta_i]+[\pi,\pi])^{n_i}=0$.

Dar grupul $\pi_1(X,x_o)/[\pi,\pi]$ fiind abelian, avem, ţinînd seama că $\beta_i \simeq \eta_{il}\mu_{io}\mu_{il}^{-1}\mu_{i2}\eta_{il}^{-1}$, $\prod_i ([\mu_{io}\mu_{il}^{-1}\mu_{i2}]+[\pi,\pi])^{n_i}=0$.

Pe de altă parte, din ultima exprimare a 1-simplexului singular u, atunci clasa "loop"-uli u se scrie $[u]=\prod_i [\mu_{io}\mu_{il}^{-1}\mu_{i2}]^{n_i}$. Am obţinut aşadar că $[u]+[\pi,\pi]=0$, care arată că $[u]\in[\pi,\pi]$ şi prin urmare, deoarece $\bar{h}$ este epimorfism (h fiind astfel) şi $\operatorname{Ker}\bar{h}=0$, deducem că acesta este izomorfism.

4.4. Să se arate că o m-varietate nu poate fi homeomorfă cu o n-varietate decît dacă m=n.

Rezolvare. Dacă M este o m-varietate şi N este o n-varietate şi presupunem că există un homeomorfism $f:M\longrightarrow N$, atunci fie $x\in M$. Punctul $f(x)\in N$ are o vecinătate deschisă homeomorfă cu o mulţime deschisă din R^n, fie aceasta V. Atunci $U=f^{-1}(V)$ pe de o parte este homeomorfă cu V, iar pe de altă parte este o vecinătate deschisă a lui x. Există $U'\in\mathcal{V}(x)$ deschisă şi homeomorfă cu o mulţime deschisă din R^m. Atunci $U'\cap U$ este homeomorfă cu o deschisă din R^m iar $f(U'\cap U)=f(U')\cap V$ este homeomorfă cu o deschisă din R^n. In baza "Teoremei de invarianţă a domeniului" (Teorema 4.3.16) rezultă că acest lucru nu este posibil decît dacă m=n.

4.5. Dată o pereche simplicială (K,L), fie $K\cup CL$ complexul simplicial obţinut adăugînd un con la L, adică considerînd uniunea dintre K şi $CL=L*a$, unde a este un singur vîrf. Să se arate că există un izomorfism $\alpha:H_*(K,L)\longrightarrow \tilde{H}_*(K\cup CL)$, încît dacă $f:(|K|,|L|)\longrightarrow(|M|,|N|)$ este o aplicaţie de perechi şi $\bar{f}:|K\cup CL|\longrightarrow|M\cup CN|$ este aplicaţia dedusă din f şi $f*1$, atunci are loc diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccc} H_*(K,L) & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{H}_*(K \cup CL) \\ \downarrow f_* & & \downarrow \\ H_*(M,N) & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{H}_*(M \cup CN) \end{array}$$

Rezolvare. Considerăm perechea simplicială $(K \cup CL, CL)$ şi fie şirul exact de omologie redusă al acesteia:

$$\ldots \tilde{H}_n(CL) \longrightarrow \tilde{H}_n(K \cup CL) \xrightarrow{j_*} H_n(K \cup CL, CL) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(CL) \longrightarrow \ldots$$

din care, dacă ţinem seama că $|CL|$ este contractibil şi că există un izomorfism $\beta_* : \tilde{H}_*(CL) \longrightarrow \tilde{H}_*(|CL|)$, (Corolarul 4.3.5), decucem izomorfismul $j_* : \tilde{H}_n(K \cup CL) \longrightarrow H_n(K \cup CL, CL)$. Aplicăm acum Teorema exciziei (Exemplul 4.3.6) şi avem:

$H_n(K \cup CL, CL) \cong H_n(K, CL \cap K) \cong H_n(K,L)$, cu alte cuvinte, incluziunea $i : (|K|, |L|) \longrightarrow (|K \cup CL|, |CL|)$ induce izomorfismul $i_* : H_n(|K \cup CL|, |CL|) \xleftarrow{\sim} H_n(|K|, |L|)$. Utilizînd şi izomorfismul β_* (Cor. 4.3.5), obţinem un izomorfism $i_* : H_n(K \cup CL, CL) \xleftarrow{\sim} H_n(K,L)$. Izomorfismul cerut α este $= j_*^{-1} i_* : H_n(K,L) \longrightarrow \tilde{H}_n(K \cup CL)$. Ţinînd seama că i_* şi j_* sînt naturale, se verifică uşor şi partea a 2-a.

4.6. Dat un cuadruplu de spaţii topologice (X,Y,Z,W), să se arate că următoarea diagramă este comutativă

$$\begin{array}{ccccccc} & & & H_n(X,W) & & & \\ & & j_{4*} \swarrow & & \searrow j_{2*} & & \\ H_n(Y,Z) & \xrightarrow{i_{1*}} & H_n(X,Z) & \xrightarrow{j_{1*}} & H_n(X,Y) & \xrightarrow{\partial_{*1}} & H_{n-1}(Y,Z) \\ \partial_{*3} \searrow & & \swarrow \partial_{*4} & & \partial_{*2} \searrow & & \nearrow j_{3*} \\ & H_{n-1}(Z,W) & & & & H_{n-1}(Y,W) & \end{array}$$

unde homomorfismele înscrise în diagramă sînt acelea ale şirurilor exacte de omologie ale tripletelor (X,Y,Z), (X,Y,W), (X,Z,W)

Rezolvare. Am notat incluziunile:

$j_1 : (X,Z) \longrightarrow (X,Y)$,

$j_2 : (X,Y) \longrightarrow (X,W)$,

$j_3 : (Y,W) \longrightarrow (Y,Z)$, $j_4 : (X,W) \longrightarrow (X,Z)$.

Comutativitatea diagramei triunghiulare superioare, adică

$j_{1*}j_{4*}=j_{2*}$ rezultă din relaţia evidentă $j_1j_4=j_2$.

Verificăm acum comutativitatea triunghiului din stînga jos, adică $\partial_{*4}\, i_{1*}=\partial_{*3}$, unde $i_1:(Y,Z)\longrightarrow(X,Z)$ este incluziunea. Fie $\{x\}\in H_n(Y,Z)$. Atunci $x=(j_3).(t')$, $t'\in S(Y,W)$, $\partial_{*3}(\{x\})=\{y\}$, $y\in S(Z,W)$, încît $(i_3).(y)=\partial t'$, pentru incluziunea $i_3:(Z,W)\longrightarrow(Y,W)$. Pe de altă parte, $i_{1*}(\{x\})=\{(i_1).(x)\}$ şi $(i_1).(x)=(i_1).(j_3).(t')=(j_4).((i_2).(t'))$, astfel că avem $(\partial_{*4}i_{1*})(\{x\})=\{z\}$, $z\in S(Z,W)$, cu $(i_4).(z)=\partial((i_2).(t'))$, pentru incluziunea $i_4:(Z,W)\longrightarrow(X,W)$. Deducem $:(i_4).(z)=(i_2).(\partial t')$ $=(i_2).((i_3).(y))=(i_4).(y)$, care implică $z=y$ şi prin urmare $(\partial_{*4}\, i_{1*})(\{x\})=\{y\}=\partial_{*3}(\{x\})$.

In mod cu totul analog se verifică comutativitatea celui de al treilea triunghi.

4.7. Fie (K,L) o pereche simplicială.

a) Să se arate că există un izomorfism de suspensie

$$s_*:H_n(K,L)\longrightarrow H_{n+1}(SK,SL)$$

astfel încît dacă $f:(|K|,|L|)\longrightarrow(|M|,|N|)$ este o aplicaţie de perechi, atunci $s_*f_*=(Sf)_*s_*$;

b) Să se arate că are loc următoarea diagramă comutativă, în care liniile sînt şirurile exacte de omologie ale perechilor simpliciale (K,L) şi respectiv (SK,SL):

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots\to & \tilde{H}_n(L) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_n(K) & \xrightarrow{j_*} & H_n(K,L) & \xrightarrow{\partial_*} & \tilde{H}_{n-1}(L) & \to\cdots \\
& \downarrow{\scriptstyle s_*} & & \downarrow{\scriptstyle s_*} & & \downarrow{\scriptstyle s_*} & & \downarrow{\scriptstyle s_*} & \\
\cdots\to & \tilde{H}_{n+1}(SL) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_{n+1}(SK) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(SK,SL) & \xrightarrow{\partial_*} & \tilde{H}_n(SL) & \to\cdots
\end{array}$$

Rezolvare. In cazul absolut izomorfismul de suspensie este stabilit prin Teorema 4.4.10, unde, pentru un complex simplicial K, se construieşte homomorfismul $s:\tilde{\Delta}(K)\longrightarrow\tilde{\Delta}(SK)$ cu proprietăţile $s(\tilde{\Delta}_n(K))\subset\tilde{\Delta}_{n+1}(SK)$ şi $\partial s=s\partial$.

Pentru perechea simplicială (K,L) putem considera homomorfismele $s:\tilde{\Delta}(K)\longrightarrow\tilde{\Delta}(SK)$ şi $s:\tilde{\Delta}(L)\longrightarrow\tilde{\Delta}(SL)$, care

un homomorfism $\theta: \Delta(K,L) \longrightarrow \Delta(SK,SL)$ care face comutativă următoarea diagramă:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \widetilde{\Delta}_n(L) & \xrightarrow{i.} & \widetilde{\Delta}_n(K) & \xrightarrow{j.} & \Delta_n(K,L) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow s & & \downarrow s & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \widetilde{\Delta}_{n+1}(SL) & \xrightarrow{i'} & \widetilde{\Delta}_{n+1}(SK) & \xrightarrow{j'} & \Delta_{n+1}(SK,SL) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Din aceasta se obţine diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \widetilde{H}_n(L) & \xrightarrow{i_*} & \widetilde{H}_n(K) & \xrightarrow{j_*} & H_n(K,L) & \xrightarrow{\partial_*} & \widetilde{H}_{n-1}(L) & \xrightarrow{i_*} & \widetilde{H}_{n-1}(K) & \\ & \downarrow s_* & & \downarrow s_* & & \downarrow \theta_* & & \downarrow s_* & & \downarrow s_* & \\ \cdots & \widetilde{H}_{n+1}(SL) & \xrightarrow[i'_*]{} & H_{n+1}(SK) & \xrightarrow{j'_*} & H_{n+1}(SK,SL) & \longrightarrow & \widetilde{H}_n(SL) & \xrightarrow{i'} & \widetilde{H}_n(SK) & \end{array}$$

unde toate homomorfismele s_* sînt izomorfisme. Aplicînd Lema celor cinci homomorfisme, rezultă că şi θ_*, pe care-l notăm ca în enunţul problemei tot cu $s_*: H_n(K,L) \longrightarrow H_{n+1}(SK,SL)$ este de asemenea un izomorfism.

Să verificăm acum comutativitatea diagramei

$$\begin{array}{ccc} H_n(K,L) & \xrightarrow{\theta_*} & H_{n+1}(SK,SL) \\ \downarrow f_* & & \downarrow (Sf)_* \\ H_n(M,N) & \xrightarrow{\theta_*} & H_{n+1}(SM,SN) \end{array}$$

(Am păstrat notaţia θ_* ca să deosebim acest izomorfism de izomorfismul absolut de suspensie).

Fie $\{x\} \in H_n(K,L)$. Atunci $(Sf)_*(\theta_*\{x\}) = (Sf)_*\{\theta(x)\}$. Dar $x = j.(y), y \in \widetilde{\Delta}_n(K)$ şi deci $(Sf)_*(\theta_*(\{x\})) = (Sf)_*(\{\theta\, j.(y)\}) = (Sf)_*(\{j's(y)\}) = (Sf)_* j'_* s_*(\{y\}) = j''_* (Sf)'_* s_*(\{y\})$, din diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{H}_{n+1}(SK) & \xrightarrow{j'_*} & H_{n+1}(SK,SL) \\ \downarrow (Sf)'_* & & \downarrow (Sf)_* \\ \widetilde{H}_{n+1}(SM) & \xrightarrow{j''_*} & H_{n+1}(SM,SN) \end{array}$$

Avem apoi din Teorema 4.4.10

$(Sf)'_* s_* = s_* f'_*$, unde $f': |K| \longrightarrow |L|$ este indusă de f.

Deci: $(Sf)_*(\theta_*\{x\}) = (j''_* s_*)(f'_*\{y\}) = \theta_* j''_* f'_*\{y\}$, cum arată diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(M) & \xrightarrow{j''_*} & H_n(M,N) \\ \downarrow s & \theta_* & \downarrow \\ \tilde{H}_{n+1}(SM) & \xrightarrow[j''_*]{} & H_{n+1}(SM,SN) \end{array}$$

In sfîrşit, $j''_* f'_* = f_* j_*$ şi prin urmare:

$(Sf)_* (\theta_* \{x\}) = \theta_* f_* j_* \{y\} = \theta_* f_* \{x\}$.

4.8. Fie (K,L,M) un triplet simplicial în care K are o descompunere în blocuri iar L şi M sînt bloc-subcomplexe.

Să se arate că în şirul exact de omologie al acestui triplet:

$$\ldots \to H_n(L,M) \xrightarrow{i_*} H_n(K,M) \xrightarrow{j_*} H_n(K,L) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(L,M) \to \ldots$$

homomorfismele i_*, j_* şi ∂_* se pot calcula utilizînd blocuri şi complexe de bloc-lanţuri, în acelaşi mod cum sînt acestea definite utilizînd complexe de lanţuri simpliciale.

Rezolvare. Fie şirul de subcomplexe ale lui K

$K = M^{p+q} \supset M^{p+q-1} \supset \ldots \supset M^p \supset L = M^{p-1} \supset \ldots \supset M^0 = M$

format din scheletele descompunerii în blocuri.

Se consideră atunci următoarele complexe de lanţuri:

$C' = \oplus C'_r$, cu $C'_r = H_r(M^r, M^{r-1})$, dacă $p+q \geq r \geq p$ şi $C'_r = 0$ în rest,

$C = \oplus C_r$, cu $C_r = H_r(M^r, M^{r-1})$, dacă $0 \leq r \leq p+q$ şi $C_r = 0$ în rest,

$C'' = \oplus C''_r$, cu $C''_r = H_r(M^r, M^{r-1})$, dacă $0 \leq r \leq p-1$ şi $C''_r = 0$ în rest.

Din Teorema 4.4.14 avem:

$H_n(K,L) \cong H_n(C')$, $H_n(K,M) \cong H_n(C)$ şi $H_n(L,M) \cong H_n(C'')$. După Teorema 4.4.20, avem :

$C'_r = \bigoplus_{\substack{\dim e_i = r \\ \text{int } e_i \subset K-L}} H_r(e_i, \dot{e}_i)$ = grupul abelian liber cu generatorii în corespondenţă biunivocă cu r-blocurile ale căror interior sînt în K-L.

Homomorfismul de frontieră $d: C'_r \to C'_{r-1}$ se obţine astfel:

deoarece $M^r - M^{r-1}$ nu are simplexe de dimensiune mai mare decît r, $B_r(C(M^r, M^{r-1})) = 0$ şi deci putem identifica C'_r cu $Z_r(C(M^r, M^{r-1}))$ care este subgrup al grupului $C_r(M^r, M^{r-1}) \subset C_r(K,L)$. Analog C'_{r-1} poate fi privit ca subgrup al grupului $C_{r-1}(K,L)$ şi atunci

d' este restricţia homomorfismului de frontieră $d:C_r(K,L) \longrightarrow C_{r-1}(K,L)$ .Structuri analoage au complexele de lanţuri C şi C". Din şirul exact de complexe de lanţuri

$$0 \longrightarrow C(L,M) \xrightarrow{i.} C(K,M) \xrightarrow{j.} C(K,L) \longrightarrow 0$$

se deduc aplicaţiile de lanţuri: $I:C" \longrightarrow C$ şi $J:C \longrightarrow C'$ astfel că este exact şirul de complexe de lanţuri

$$0 \longrightarrow C" \xrightarrow{I} C \xrightarrow{J} C' \longrightarrow 0$$ .Sirul exact de omologie indus de acesta coincide (pînă la izomorfismul din Teorema 4.4.14) cu şirul exact de omologie al tripletului (K,L,M).

4.9.Fie p,q două numere întregi prime între ele şi $p \geqslant 2$.

Spaţiul Lens(lenticular) L(p,q) este spaţiul obţinut din discul E^3 prin identificări făcute pe frontiera S^2 după cum urmează: Se divide ecuatorul S^1 în p părţi egale prin vîrfurile $a^0,a^1,...,a^{p-1}$ şi apoi se unesc aceste vîrfuri cu polii a=(0,0,1), b=(0,0,-1) obţinîndu-se o împărţire pentru S^2 în 2p triunghiuri. (Fig.28) .L(p,q) este spaţiul rezultat din identificarea fiecărui triunghi aa^ra^{r+1} cu $ba^{r+q}a^{r+q+1}$ astfel a se identifică cu b, a^r cu a^{r+q} şi a^{r+1} cu a^{r+q+1} (r,r+q,etc.sînt interpretate ca elemente din Z_p).

Să se arate că:

a)L(p,q) este un spaţiu topologic triangulabil;

b)L(p,q) este homeomorf cu L(p,q') dacă q=-q' sau q-q' este divizibil cu p,

c)L(2,1) este homeomorf cu RP^3,

d)L(p,q) este homeomorf cu L(p,q') dacă $qq' \equiv 1 \pmod p$.

e)folosind o descompunere convenabilă în blocuri, se obţine $H_1(L(p,q)) \cong Z_p, H_2(L(p,q))=0, H_3(L(p,q)) \cong Z$.

Rezolvare

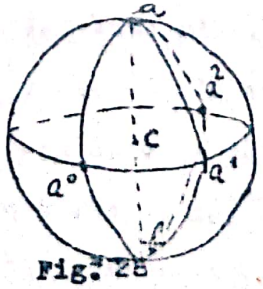


Fig. 28

a)Considerăm descompunerea discului E^3 în "tetraedre" $aa^r a^{r+1}c$ şi $ba^{r+q}a^{r+q+1}c$. Luăm divisările baricentrice ale acestora de ordinul doi şi prin identificările de pe frontiera S^2, indicate de definiţia lui L(p,q), obţinem o triangulare a acestui spaţiu. (Să se vadă pentru comparaţie şi triangularea spaţiului proiectiv real RP^n).

b)Fie q=-q'. Considerînd identificările $aa^r a^{r+1}$ cu $ba^{r+q}a^{r+q+1}$ pentru a obţine L(p,q) şi schimbînd rolul polilor a şi b, prin aceste identificări se obţine L(p,-q). Dar prin schimbarea polilor se obţin spaţii ce sînt homeomorfe printr-o rotaţie (de unghi 2q). Dacă $q-q'=mp, m\in Z$, atunci $a^{r+q'}=a^{r+q+mp}=a^{r+q}$ şi deci L(p,q')=L(p,q).

c)L(2,1) se obţine din E^3 făcînd identificările $aa^0a^1 \equiv ba^1a^0$ şi $aa^1a^0 \equiv ba^0a^1$, care înseamnă identificarea punctelor diametral opuse în S^2 şi prin urmare spaţiul cît este RP^3.

d)Fie $qq'\equiv 1 \pmod p$. Se descompune mai întîi discul E^3 în "tetraedrele" $aa^r a^{r+1}b$ şi construim din acestea un nou spaţiu, considerînd suma topologică a acestora (reuniunea disjunctă) şi făcînd apoi unele identificări după triunghiurile situate în S^2, anume $aa^r a^{r+1}$ se identifică cu $ba^{r+q}a^{r+q+1}$ (Fig.29)

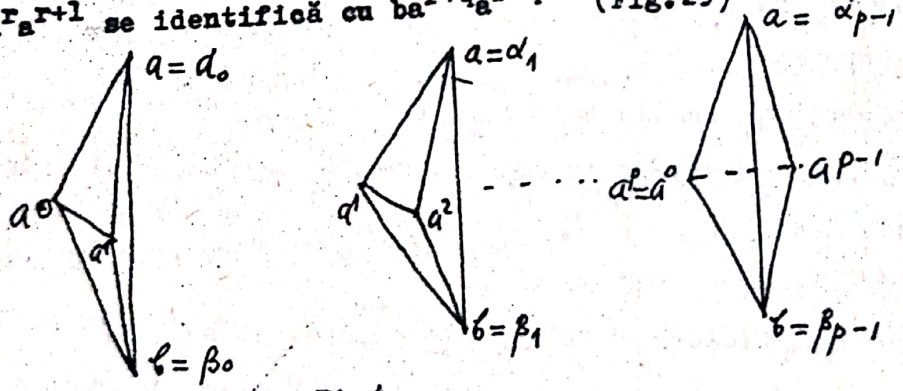


Fig.29

In Fig.29 s-au renumerotat doar polii a şi b vîrfurile a^i fiind deosebite prin triunghiurile în care intervin. Cu notaţiile de mai sus se fac identificările $\alpha_r a^r a^{r+1}$ cu $\beta_{r+q} a^{r+q}a^{r+q+1}$. Prin aceste identificări se obţine un nou spaţiu homeomorf cu E^3, în care linia polilor, notată cu AB, este cea obţinută prin identificarea tuturor muchiilor $a^r a^{r+1}$ (punctul A provenind din $a^0, a^q, ..$, iar B din $a^1, a^{q+1}, ..$).

In E^3 cu linia polilor AB refacem identificările din E^3 inițial care dau pe $L(p,q)$, adică :

$$\alpha_0 a^0 \beta_0 \equiv \alpha_{p-1} a^0 \beta_{p-1},$$
$$\alpha_1 a^1 \beta_1 \equiv \alpha_0 a^1 \beta_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{p-1} a^{p-1} \beta_{p-1} = \alpha_{p-2} a^{p-2} \beta_{p-2}$$

Considerăm atunci diviziunea ecuatorului prin vîrfurile $A^{r_0} = \alpha_0 = \beta_q, A^{r_1} = \alpha_1 = \beta_{q+1}, \ldots, A^{r_{p-1}} = \beta_{p+q-1}$. Identificările de mai sus se scriu acum sub forma:

$$AA^{r_0}A^{r_{-q}} \equiv BA^{r_{p-1}}A^{r_{p-q-1}},$$
$$AA^{r_1}A^{r_{1-q}} \equiv BA^{r_0}A^{r_{0-q}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$AA^{r_{p-1}}A^{r_{1-q}} \equiv BA^{r_0}A^{r_{-q}}$$

Dacă q' este astfel încît $qq' \equiv 1 \pmod p$, atunci putem alege numerele $r_0, \ldots, r_{p-1}$ care să satisfacă, (mod p) următoarele condiții

$r_{p-1} - r_0 = q'$, $r_{-q} - r_0 = 1$, $r_{p-q-1} - r_{p-1} = 1$,
$r_{p-q-1} - r_{-q} = q'$, $r_{1-q} - r_1 = 1$, $r_{-q} - r_0 = 1$,
$r_0 - r_1 = q'$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$r_{-q} - r_{1-q} = q'$, $r_{1-q} - r_{p-1} = 1$ și $r_{-q} - r_0$
$\cdots\cdots\cdots\cdots$
$r_0 - r_{p-1} = q'$,
$r_{-q} - r_{1-q} = q'$.

Luăm $r_0 = 0, r_1 = -q', r_2 = -2q', \ldots, r_{p-1} = -(p-1)q'$. Avem atunci $r_{-q} = -(-q)q' = 1$ și se verifică și condiția $r_{-q} - r_0 = 1$. Apoi $r_{1-q} = -(1-q)q' = 1 - q' = 1 + r_1$. In mod analog se verifică celelalte relații. Este clar de asemenea că $r_p \equiv r_0 \pmod p$. Am obținut astfel spațiul $L(p,q')$.

e) Pentru calculul grupurilor de omologie ale spațiului $L(p,q)$, care este un spațiu topologic triangulabil, facem următoarea descompunere în blocuri, cîte unul în fiecare dimensiune:

Fie M triangularea lui E^3 din a) şi N suboomplexul său care dă o triangulare pentru S^2. Fie K triangularea rezultată prin identificare pentru L(p,q) şi fie $f:(M,N) \longrightarrow (K,L)$, $L=f(N)$, aplicaţia de identificare. Aceasta este o aplicaţie simplicială. Considerăm acum $e^3=K, e^2=L, e^1=$simplexele din $f([a^0,a^1])$, $e^0=f(a^0)$. Luînd $\dot{e}^3=e^2, \dot{e}^2=e^1$, $\dot{e}^1=e^0, \dot{e}^0=\phi$, se verifică imediat că este vorba de o descompunere în blocuri. Avem atunci complexul de lanţuri

$$0 \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

unde $C_3=H_3(M^3,M^2) \cong H_3(e^3,\dot{e}^3)$=grupul abelian liber generat de $\alpha^3 = f_*(\phi^2(\{\bar{\sigma}_3\})$, unde $\{\bar{\sigma}_3\}$ este generatorul standard pentru $H_3(E^3,S^2) \cong Z$; iar ϕ^2 este aplicaţia "lanţ-subdivizare", Definiţia 4.3.2;

$C_2=H_2(M^2,M^1)$=grupul liber generat de $\alpha^2 = f_*(\phi^2(\{\sigma_2^+\})$, unde $\{\sigma_2^+\}$ este generatorul standard pentru $H_2(S^2_+,S_1) \cong Z$ ((S^2_+,S_1) este o pereche homeomorfă cu (E^2,S^1));

$C_1=H_1(M^1,M^0)$=grupul abelian liber generat de $\alpha^1 = \{f_*(\phi^2([a^0,a^1])\}$;

$C_0=H_0(M^0,\phi)$=grupul liber generat de $\alpha^0=\{f(a^0)\}$;

Avem atunci $\partial_3(\alpha^3) = \partial_* f_*(\phi^2(\{\bar{\sigma}_3\}) = f_*(\phi^2(\{\partial\bar{\sigma}_3\}) = f_*(\phi^2(\{\sigma_2\})$, unde σ_2 este genereatorul standard pentru $H_2(S^2)=Z_2(S^2)$ şi deci $\partial_3(\alpha^3)=f_*(\phi^2(\{\sigma_1 a - \sigma_1 b\})$, unde σ_1 este generator pentru $H_1(S^1)=Z_1(S^1)$ şi rezultă $\partial_3(\alpha^3)=f_*(\phi^2(\{\sigma_1 a\}) - f_*(\phi^2(\{\sigma_1 b\})$ deoarece f identifică faţa $a^{i-1}a^i a$ cu faţa $a^{i-1+q}a^{i+q}b$. Prin urmare : $f_*(\phi^2(\{\sigma_1 a\}) = f_*(\phi^2(\{\sigma_1 b\})$, de unde conchidem că $\partial_3(\alpha^3)=0$. Rezultă deci că $H_3(L(p,q)) = C_3 \cong Z$.

In mod asemănător se arată că avem $\partial_2(\alpha^2)=p\alpha^1$ şi $\partial_1(\alpha^1)=0$, şi evident $\partial_0(\alpha^0)=0$. Incît, deducem în continuare că Ker $\partial_2=0$, adică $H_2(L(p,q)) =0$ şi Ker $\partial_1 = C_1 \cong Z$, Im $\partial_2 \cong pZ$, deci $H_1(L(p,q)) = Z_p$ şi în sfîrşit este evident că $H_0(L(p,q)) \cong Z$.

4.10.Să se arate că $(A\otimes B)\otimes C \cong A\otimes(B\otimes C)$, pentru oricare trei grupuri abeliene A,B,C.

Rezolvare.Pentru $a\in A$ considerăm aplicaţia $\varphi_a : B\times C \longrightarrow (A\otimes B)\otimes C$, definită prin $\varphi_a(b,c)=(a\otimes b)\otimes c$. Această aplicaţie este Z-balansată şi deci există un homomorfism $\varphi_a' : B\otimes C \longrightarrow (A\otimes B)\otimes C$, astfel încît $\varphi_a'(b\otimes c)=(a\otimes b)\otimes c$.

Definim acum aplicaţia $\varphi' : A\times(B\otimes C)\longrightarrow(A\otimes B)\otimes C$ prin $\varphi'(a,\sum_i b_i\otimes c_i)=\varphi_a'(\sum_i b_i\otimes c_i)=\sum_i \varphi_a'(b_i\otimes c_i)=$

$=\sum_i a\otimes(b_i\otimes c_i)$.

Aplicaţia φ' este Z-balansată şi există deci un homomorfism de grupuri $\varphi : A\otimes(B\otimes C)\longrightarrow(A\otimes B)\otimes C$, încît $\forall\, a\in A$, $b\in B, c\in C$, avem $\varphi(a\otimes(b\otimes c))=(a\otimes b)\otimes c$.

Procedînd în mod analog se construieşte un homomorfism $\psi : (A\otimes B)\otimes C \longrightarrow A\otimes(B\otimes C)$ astfel încît $\psi((a\otimes b)\otimes c)=a\otimes(b\otimes c)$. Se verifică imediat că φ şi ψ sînt homomorfisme inverse unul celuilalt.

4.11.a)Să se arate că un homomorfism de grupuri abeliene $\theta : G\longrightarrow H$ induce un homomorfism $\theta_* : H_n(X,Y;G)\longrightarrow H_n(X,Y;H)$, pentru orice pereche topologică (X,Y);

b)Dacă $f:(X,Y)\longrightarrow(A,B)$ este o aplicaţie continuă de perechi, atunci are loc relaţia: $\theta_* f_* = f_* \theta_*$.

Rezolvare.a)Homomorfismul $\theta : G\longrightarrow H$ induce homomorfismul $1\otimes\theta : S(X,Y)\otimes G\longrightarrow S(X,Y)\otimes H$, care este o aplicaţie de lanţuri deoarece $(\partial\otimes 1)(1\otimes\theta)=\partial\otimes\theta=(1\otimes\theta)\partial$. Atunci, pentru orice n există homomorfismul: $\theta_*=(1\otimes\theta)_* : H_n(X,Y;G)\longrightarrow H_n(X,Y;H)$.

b)Dacă $f:(X,Y)\longrightarrow(A,B)$ este o aplicaţie continuă de perechi, atunci se poate considera aplicaţia de lanţuri $f_\#:S(X,Y)\longrightarrow S(A,B)$ şi se verifică imediat relaţia $(1\otimes\theta)(f_\#\otimes 1)=(f_\#\otimes 1)(1\otimes\theta)$, care implică $(1\otimes\theta)_*(f_\#\otimes 1)_* = (f_\#\otimes 1)_*(1\otimes\theta)_*$, adică $\theta_* f_* = f_* \theta_*$.

4.12. Dat un şir exact de grupuri abeliene

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H \longrightarrow 0$$

şi o pereche de spaţii topologice (X,Y), să se arate că există un şir exact

$$\ldots \longrightarrow H_n(X,Y;F) \xrightarrow{\alpha_*} H_n(X,Y;G) \xrightarrow{\beta_*} H_n(X,Y;H) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}(X,Y;F) \longrightarrow \ldots$$

(Acesta este "şirul exact al coeficienţilor", iar homomorfismul δ_* este homomorfismul de frontieră al lui Bockstein).

Rezolvare: Deoarece grup graduat $S(X,Y)$ este un grup abelian liber, are loc următorul şir exact de complexe de lanţuri (vezi de exemplu Prop. 4.5.7):

$$0 \longrightarrow S(X,Y)\otimes F \xrightarrow{1\otimes\alpha} S(X,Y)\otimes G \xrightarrow{1\otimes\beta} S(X,Y)\otimes H \longrightarrow 0$$

şi acesta, conform cu Teorema 4.4.2, induce şirul exact de omologie de mai sus, cu $\alpha_* = (1\otimes\alpha)_*$, $\beta_* = (1\otimes\beta)_*$, iar homomorfismul de frontieră Bockstein fiind homomorfismul de legătură din teorema menţionată.

4.13. Fie K un complex simplicial cu o descompunere în blocuri şi fie L un subcomplex-bloc.

Fie C complexul de lanţuri $\oplus C_n$, unde $C_n = H_n(M^n, M^{n-1})$ şi $M^n = K_n \cup L$.

Pentru orice grup abelian G se consideră complexul de lanţuri $C(G) = \oplus C_n(G)$, analog cu C, definit prin $C_n(G) = H_n(M^n, M^{n-1}; G)$.

Să se arate că $C(G)$ şi $C\otimes G$ sînt lanţ-izomorfe, astfel încît deşi s-ar părea că se obţin, luînd $C(G)$ şi $C\otimes G$, două generalizări a metodei calculului omologiei prin descompuneri în blocuri, în fapt aceste generalizări coincid.

Rezolvare: Avem $C_n = H_n(M^n, M^{n-1}) = \bigoplus_{\substack{\text{int } e_i \subset K-L \\ \dim e_i = n}} H_n(e_i, \dot{e}_i)$ (cf. Teorema 4.4.20). Prin urmare:

$$C_n\otimes G = \bigoplus_{\substack{\text{int } e_i \subset K-L \\ \dim e_i = n}} H_n(e_i, \dot{e}_i)\otimes G .$$

Pe de altă parte, $C_n(G)=H_n(M^n,M^{n-1};G)=H_n(\Delta(M^n,M^{n-1})\otimes G)$, unde $\Delta_r(M^n,M^{n-1})=\oplus\Delta_r(e_i,\dot{e}_i)$ şi ţinînd seama că $\Delta_r(M^n,M^{n-1})$ este liber, se obţine ca în demonstraţia Teoremei 4.4.20, că

$$C_n(G)=\bigoplus_{\substack{\text{int } e_i\subset K-L\\ \dim e_i=n}} H_n(e_i,\dot{e}_i;G).$$

Utilizăm acum Exerciţiul 4.16, care urmează în paginile următoare, şi deducem: $H_n(e_i,\dot{e}_i;G)\cong H_n(e_i,\dot{e}_i)\overset{G}{\otimes}\oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(e_i,\dot{e}_i);G)$, adică $H_n(e_i,\dot{e}_i;G)\overset{\theta_i}{\cong} H_n(e_i,\dot{e}_i)\otimes G$. In felul acesta se obţin izomorfismele: $\theta_n:C_n(G)\longrightarrow C_n\otimes G$. Ca în Ex. 4.8 homomorfismul de frontieră $\partial_r:C_r(G)\longrightarrow C_{r-1}(G)$ este indus de $d_r\otimes 1:C_r(K,L)\otimes G\longrightarrow C_{r-1}(K,L)\otimes G$ care coincide cu homomorfismul de frontieră pentru complexul $C\otimes G$. Astfel θ_n definesc un izomorfism de complexe de lanţuri.

4.14. Dat un şir exact de grupuri abeliene $0\longrightarrow A\xrightarrow{\alpha} B\xrightarrow{\beta} C\longrightarrow 0$ şi un alt grup abelian G, să se arate că şirul

$$A\otimes G\xrightarrow{\alpha\otimes 1} B\otimes G\xrightarrow{\beta\otimes 1} C\otimes G\longrightarrow 0$$

este exact, dar (luînd de exemplu $A=B=Z, C=G=Z_2$) homomorfismul $\alpha\otimes 1$ poate să nu fie injectiv.

b) Dacă şirul $0\longrightarrow A\xrightarrow{\alpha} B\xrightarrow{\beta} C\longrightarrow 0$ este un şir exact scindat în sensul Propoziţiei 1.3.36, atunci şirul

$$0\longrightarrow A\otimes G\xrightarrow{\alpha\otimes 1} B\otimes G\xrightarrow{\beta\otimes 1} C\otimes G\longrightarrow 0$$

este de asemenea un şir exact scindat.

Rezolvare. a) Avem $(\beta\otimes 1)(\alpha\otimes 1)=\beta\alpha\otimes 1=0$ şi deci $\mathrm{Im}(\alpha\otimes 1)\subseteq \mathrm{Ker}(\beta\otimes 1)$. Pentru a dovedi incluziunea reciprocă definim $\overline{\beta}:\frac{E\otimes G}{\mathrm{Im}(\alpha\otimes 1)}\longrightarrow C\otimes G$, prin $\overline{\beta}(\hat{x})=(\beta\otimes 1)(x)$, pentru oricare $x\in B\otimes G$. Putem construi atunci $\gamma:C\otimes G\longrightarrow \frac{B\otimes G}{\mathrm{Im}(\alpha\otimes 1)}$ astfel încît $\gamma(c\otimes g)=\widehat{b\otimes g}$, pentru $c=\beta(b)\in C$ şi $g\in G$. Avem atunci $\gamma\overline{\beta}(\hat{x})=\gamma(\beta\otimes 1)(x)=\hat{x}$, adică $\gamma\overline{\beta}=\mathrm{Id}$, care arată că $\overline{\beta}$ este injectiv şi deci dacă $(\beta\otimes 1)(x)=0$, $x\in B\otimes G$, rezultă $x\in \mathrm{Im}(\alpha\otimes 1)$.

Considerăm acum şirul exact

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} Z_2 \longrightarrow 0,$$

cu $\alpha(1)=2$ şi $\beta(1)=\hat{1}$.

Inmulţind tensorial cu Z_2, obţinem $\alpha \otimes 1 : Z \otimes Z_2 \longrightarrow Z \otimes Z_2$, cu $(\alpha \otimes 1)(1 \otimes \hat{1}) = 2 \otimes \hat{1} = \hat{0}$ şi deci $\mathrm{Ker}(\alpha \otimes 1) = Z \otimes Z_2 \cong Z_2$, care arată că $\alpha \otimes 1$ nu este monomorfism.

b) Să presupunem că şirul exact $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ este scindat şi deci există un homomorfism $\delta : C \longrightarrow B$ încît $\beta\delta = 1_C$. Putem arăta atunci că şirul

$$0 \longrightarrow A \otimes G \xrightarrow{\alpha \otimes 1} B \otimes G \xrightarrow{\beta \otimes 1} C \otimes G \longrightarrow 0$$

este un şir exact scindat. In adevăr, din Propoziţia 1.3.36, există un homomorfism $\gamma : B \longrightarrow A$ încît $\gamma\alpha = 1_A$. Avem atunci $(\gamma \otimes 1)(\alpha \otimes 1) = 1_{A \otimes G}$ şi deci $\alpha \otimes 1$ este monomorfism. Apoi, homomorfismul $\delta \otimes 1 : C \otimes G \longrightarrow B \otimes G$ satisface condiţia $(\beta \otimes 1)(\delta \otimes 1) = 1_{C \otimes G}$.

4.15. Date grupurile abeliene A şi B, scriem A sub forma F/R, unde F este un grup abelian liber, astfel încît există un şir exact

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0.$$

Definim $\mathrm{Tor}(A,B) = \mathrm{Ker}(\alpha \otimes 1)$, astfel că după Exerciţiul 4.14 există şirul exact

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(A,B) \longrightarrow R \otimes B \xrightarrow{\alpha \otimes 1} F \otimes B \xrightarrow{\beta \otimes 1} A \otimes B \longrightarrow 0.$$

Să se stabilească următoarele proprietăţi pentru grupul $\mathrm{Tor}(A,B)$.

(a) Dat un alt grup abelian $A' = F'/R'$ şi un homorfism $f : A \longrightarrow A'$, există un singur homomorfism $\bar{f} : \mathrm{Tor}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Tor}(A',B)$ astfel încît diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}(A,B) & \longrightarrow & R \otimes B & \xrightarrow{\alpha \otimes 1} & F \otimes B & \xrightarrow{\beta \otimes 1} & A \otimes B \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow f_2 \otimes 1 & & \downarrow f_1 \otimes 1 & & \downarrow f \otimes 1 \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}(A',B) & \longrightarrow & R' \otimes B & \xrightarrow{\alpha' \otimes 1} & F' \otimes B & \xrightarrow{\beta' \otimes 1} & A' \otimes B \longrightarrow 0
\end{array}$$

este comutativă, unde f_1 şi f_2 sînt homomorfisme arbitrare care fac comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\alpha} & F & \xrightarrow{\beta} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ 0 & \longrightarrow & R' & \xrightarrow[\alpha']{} & F' & \xrightarrow[\beta']{} & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(asemenea homomorfisme există, prin Propoziţia 1.3.37).

(b) $\mathrm{Tor}(A,B)$ depinde, pînă la izomorfisme, numai de grupurile A şi B şi nu de reprezentarea particulară $A=F/R$.

(c) $\mathrm{Tor}(\bigoplus_i A_i, \bigoplus_j B_j) \cong \bigoplus_{i,j} \mathrm{Tor}(A_i, B_j)$.

Rezolvare: Facem mai întîi observaţia că un şir exact de forma $0 \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0$, cu F un grup abelian liber, poate fi construit astfel: F este grupul abelian liber generat de $A-\{0\}$. Apoi, se defineşte homomorfismul $\beta : F \longrightarrow A$ prin $\beta(f)=n_1a_1+\ldots+n_pa_p$, dacă $f=n_1a_1 \oplus n_2a_2 \oplus \ldots \oplus n_pa_p \in F$. Acesta este un epimorfism şi luăm $R=\mathrm{Ker}\,\beta$.

(a) Fie $\sum_i r_i \otimes b_i \in \mathrm{Tor}(A,B)$, adică $(\alpha \otimes 1)(\sum_i r_i \otimes b_i)=0$. Rezultă imediat, din comutativitatea $(f_1 \otimes 1)(\alpha \otimes 1)=(\alpha' \otimes 1)(f_2 \otimes 1)$, că $(f_2 \otimes 1)(\sum_i r_i \otimes b_i) \in \mathrm{Ker}(\alpha' \otimes 1)$ şi deci putem defini homomorfismul $\overline{f} : \mathrm{Tor}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Tor}(A',B)$ prin $\overline{f}(\sum_i r_i \otimes b_i) = (f_2 \otimes 1)(\sum_i r_i \otimes b_i)$. Evident, pentru f_1, f_2 fixate, homomorfismul $\overline{f}$ este unic încît satisface comutativitatea $(f_2 \otimes 1)/\mathrm{Tor}(A,B)=\overline{f}$.

Dacă se înlocuiesc homomorfismele f_1, f_2 cu f_1' şi respectiv f_2', avem $f_1'\alpha = \alpha' f_2'$ şi $f\beta = \beta' f_1' = \beta' f_1$.

Rezultă că $\beta'(f_1'-f_1)=0$, adică $\mathrm{Im}(f_1'-f_1) \subseteq \mathrm{Ker}\,\beta' = \mathrm{Im}\,\alpha'$ şi deci se poate defini un homomorfism $h : F \longrightarrow R'$ astfel încît $f_1'=f_1+\alpha' h$.

Deducem: $\alpha' f_2' = (f_1+\alpha' \circ h)\circ\alpha = \alpha' f_2 + \alpha' \circ (h \circ \alpha)$ şi deoarece α' este monomorfism, conchidem că $f_2'=f_2+h\circ\alpha$.

Atunci, dacă $\sum_i r_i \otimes b_i \in \mathrm{Tor}(A,B)=\mathrm{Ker}(\alpha \otimes 1)$, avem:

$$(f_2' \otimes 1)(\sum_i r_i \otimes b_i) = \sum_i r_2'(r_i) \otimes b_i = \sum_i [f_2(r_i) \otimes b_i + (h\circ\alpha)(r_i) \otimes b_i] =$$

$$= \sum_i f_2(r_i) \otimes b_i + (h \otimes 1)(\alpha \otimes 1)(\sum_i r_i \otimes b_i) = (f_2 \otimes 1)(\sum_i r_i \otimes b_i),$$

care arată că homomorfismul $\overline{f}$ nu depinde de f_1 şi f_2.

(b). Arătăm mai întîi că Tor(A,B) nu depinde de reprezentarea A=F/R. Dacă presupunem date diagramele comutative

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\alpha} & F & \xrightarrow{\beta} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f_2}\downarrow\uparrow{\scriptstyle f_2'} & & {\scriptstyle f_1}\downarrow\uparrow{\scriptstyle f_1'} & & \updownarrow\ \mathrm{Id} & & \\ 0 & \longrightarrow & R' & \xrightarrow{\alpha'} & F' & \xrightarrow{\beta'} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

după (a) există $\overline{f}:\mathrm{Ker}(\alpha\otimes 1)\longrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha'\otimes 1)$ şi $\overline{f}':\mathrm{Ker}(\alpha'\otimes 1)\longrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha\otimes 1)$ unicele care verifică relaţiile: $\overline{f}=(f_2\otimes 1)/\mathrm{Ker}(\alpha\otimes 1)$ şi respectiv $\overline{f}'=(f_2'\otimes 1)/\mathrm{Ker}(\alpha'\otimes 1)$. Se deduce uşor din (a) că avem $\overline{f}\circ\overline{f}'=\mathrm{Id}$ şi $\overline{f}'\circ\overline{f}=\mathrm{Id}$, care arată că $\overline{f}$ este izomorfism.

Dacă homomorfismul $f:A\longrightarrow A'$ de la (a) este izomorfism, rezultă uşor că $\overline{f}:\mathrm{Tor}(A,B)\longrightarrow \mathrm{Tor}(A',B)$ este izomorfism.

Dacă $g:B\longrightarrow B'$ este un izomorfism, atunci putem construi diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}(A,B) & \longrightarrow & R\otimes B & \xrightarrow{\alpha\otimes 1} & F\otimes B & \xrightarrow{\beta\otimes 1} & A\otimes B \longrightarrow 0 \\ & & \overline{g}\downarrow & & 1\otimes g\downarrow & & \downarrow 1\otimes g & & \downarrow 1\otimes g \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Tor}(A,B') & \longrightarrow & R\otimes B' & \xrightarrow{\alpha\otimes 1} & F\otimes B' & \xrightarrow{\beta\otimes 1} & A\otimes B' \longrightarrow 0 \end{array}$$

unde $\overline{g}=(1\otimes g)/\mathrm{Tor}(A,B)$ şi care se arată uşor că este un izomorfism (cu inversul $\overline{g}^{-1}=(1\otimes g^{-1})/\mathrm{Tor}(A,B')$).

(c) Considerăm şirurile exacte

$$0\longrightarrow R_i \xrightarrow{\alpha_i} F_i \xrightarrow{\beta_i} A_i \longrightarrow 0,$$

cu F_i grupuri abeliene libere. Atunci, pe de o parte avem şirurile exacte de grupuri abeliene:

$$0\longrightarrow \mathrm{Tor}(A_i,B_j)\longrightarrow R_i\otimes B_j \xrightarrow{\alpha_i\otimes 1} F_i\otimes B_j \xrightarrow{\beta_i\otimes 1} A_i\otimes B_j \longrightarrow 0$$

care, luînd suma directă, după i şi j dau şirul exact:

$$0\longrightarrow \bigoplus_{i,j}\mathrm{Tor}(A_i,B_j)\longrightarrow \bigoplus_{i,j}(R_i\otimes B_j)\longrightarrow \bigoplus_{i,j}(F_i\otimes B_j)\longrightarrow \bigoplus_{i,j}A_i\otimes B_j\longrightarrow 0$$

adică

$$0\longrightarrow \bigoplus \mathrm{Tor}(A_i,B_j)\longrightarrow R\otimes B \xrightarrow{\alpha\otimes 1} F\otimes B \xrightarrow{\beta\otimes 1} A\otimes B\longrightarrow 0$$

unde am notat: $R=\bigoplus_i R_i$, $B=\bigoplus_j B_j$, $F=\bigoplus_i F_i$,

$\alpha = \bigoplus_i \alpha_i$, $\beta = \bigoplus_i \beta_i$. Pe de altă parte, avem şirul exact

$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0$ şi prin urmare deducem şirul exact

$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(A,B) \longrightarrow R\otimes B \xrightarrow{\alpha\otimes 1} F\otimes B \xrightarrow{\beta\otimes 1} A\otimes B \longrightarrow 0$.

Comparînd şirurile exacte obţinute, deducem izomorfismul

$\mathrm{Tor}(A,B) \cong \bigoplus_{i,j} \mathrm{Tor}(A_i,B_j)$.

4.16. Fie $C = \bigoplus C_n$ un complex de lanţuri, pentru care orice grup C_n este abelian liber şi fie G un grup abelian oarecare.

Să se demonstreze că:

$H_n(C\otimes G) \cong H_n(C)\otimes G \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C),G)$.

Rezolvare. Avem şirul exact

$0 \longrightarrow Z_n(C) \xrightarrow{\alpha_n} C_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1}(C) \longrightarrow 0$

care este de asemenea scindat, deoarece $B_{n-1}(C)$ este grup liber (fiind subgrup al unui grup abelian liber). Din Exerciţiul 4.14 deducem şirul exact scindat:

$0 \longrightarrow Z_n(C)\otimes G \xrightarrow{\alpha_n\otimes 1} C_n\otimes G \xrightarrow{\partial\otimes 1} B_{n-1}(C)\otimes G \longrightarrow 0$.

Cu alte cuvinte, dacă considerăm complexele de lanţuri $Z(C)\otimes G = \bigoplus_n Z_n(C)\otimes G$ şi $B(C)\otimes G = \bigoplus B_{n-1}(C)$, avînd drept homomorfisme frontieră homomorfismele triviale, obţinem şirul exact de complexe de lanţuri:

$0 \longrightarrow Z(C)\otimes G \xrightarrow{\alpha\otimes 1} C\otimes G \xrightarrow{\partial\otimes 1} B(C)\otimes G \longrightarrow 0$

datorită comutativităţii diagramei

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Z_n(C)\otimes G & \xrightarrow{\alpha_n\otimes 1} & C_n\otimes G & \xrightarrow{\partial_n\otimes 1} & B_{n-1}(C)\otimes G & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow 0 & & \downarrow \partial_n\otimes 1 & & \downarrow 0 & & \\
0 & \longrightarrow & Z_{n-1}(C)\otimes G & \xrightarrow[\alpha_{n-1}\otimes 1]{} & C_{n-1}\otimes G & \xrightarrow[\partial_{n-1}\otimes 1]{} & B_{n-2}(C)\otimes G & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Şirul exact de complexe de lanţuri considerat induce şirul exact de omologie:

$\ldots \longrightarrow H_n(Z\otimes G) \xrightarrow{(\alpha\otimes 1)_*} H_n(C\otimes G) \xrightarrow{(\partial\otimes 1)_*} H_n(B\otimes G) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}(Z\otimes G) \longrightarrow \ldots$

Dar $H_n(Z\otimes G) = Z_n(C)\otimes G$ şi $H_n(B\otimes G) = B_{n-1}(C)\otimes G$, astfel încît obţinem şirul exact:

$$\ldots \to B_n(C)\otimes G \xrightarrow{\beta_n\otimes 1} Z_n(C)\otimes G \xrightarrow{(\alpha\otimes 1)_*} H_n(C\otimes G) \xrightarrow{(\partial\otimes 1)_*} B_{n-1}(C)\otimes G \xrightarrow{\beta_{n-1}\otimes 1} Z_{n-1}\otimes G \to$$

Din acest şir exact deducem şirul exact

$$(1)\quad 0 \longrightarrow \frac{Z_n(C)\otimes G}{\mathrm{Im}(\beta_n\otimes 1)} \xrightarrow{\theta} H_n(C\otimes G) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\beta_{n-1}\otimes 1)\to 0$$

unde $\theta(\hat{x})=(\alpha\otimes 1)_*(x)$.

Avem de asemenea:

$$(2)\quad \frac{Z_n(C)\otimes G}{B_n(C)\otimes G} \cong H_n(C)\otimes G.$$

Din şirul exact

$$0 \longrightarrow B_{n-1}(C) \xrightarrow{\beta_{n-1}} Z_{n-1}(C) \longrightarrow H_{n-1}(C) \longrightarrow 0$$

în care $Z_{n-1}(C)$ este grup abelian liber (fiind subgrup al lui C_{n-1}) deducem relaţia:

$$(3)\quad \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C),G)=\mathrm{Ker}(\beta_{n-1}\otimes 1).$$

Ţinînd seama de (2) şi (3) şirul (1) devine:

$$(4)\quad 0 \longrightarrow H_n(C)\otimes G \xrightarrow{\theta} H_n(C\otimes G) \xrightarrow{(\partial\otimes 1)_*} \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C),G) \longrightarrow 0.$$

Acest şir este exact. Să arătăm că este scindat.

Grupul $B_{n-1}(C)$ fiind liber (şi deci proiectiv), există un homomorfism $h_n: B_{n-1}(C) \longrightarrow C_n$ astfel încît este comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & B_{n-1}(C) & & \\ & \overset{h_n}{\swarrow} & \downarrow 1 & & \\ C_n & \xrightarrow{\partial_n} & B_{n-1}(C) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

adică $\partial_n h_n = 1$.

Avem apoi $h_n\otimes 1_G: B_{n-1}(C)\otimes G \longrightarrow C_n\otimes G$ şi dacă $\sum_i b_i\otimes g_i \in \mathrm{Ker}(\beta_{n-1}\otimes 1)$, adică $\sum_i \beta_{n-1}(b_i)\otimes g_i = 0$, atunci

$$(\partial_n\otimes 1)\Big(\sum_i h_n(b_i)\otimes g_i\Big) = \sum_i \beta_{n-1}(b_i)\otimes g_i = 0, \text{ adică } h_n\otimes 1 \text{ aplică}$$

$\mathrm{Ker}(\beta_{n-1}\otimes 1)$ în $Z_n(C\otimes G)$ şi deci putem defini un homomorfism $h'_n: \mathrm{Ker}(\beta_{n-1}\otimes 1)=\mathrm{Tor}(H_{n-1}(C),G) \longrightarrow H_n(C\otimes G)$, prin

$h'_n(\sum_i b_i\otimes g_i)=\{(h_n\otimes 1)(\sum_i b_i\otimes g_i)\}$ .Homomorfismul h'_n satisface condiţia:$(\partial\otimes 1)_* h'_n(\sum_i b_i\otimes g_i)=\sum_i b_i\otimes g_i$,adică $(\partial\otimes 1)_* h'_n=Id$,care arată că şirul exact (4) este scindat.

Aplicînd Propoziţia 1.3.36 deducem:

$H_n(C\otimes G)\cong H_n(C)\otimes G\oplus Tor(H_{n-1}(C),G)$.

4.17.Pentru un grup abelian A,notăm

$A*Z_p=Ker(A\xrightarrow{\alpha}A)$,unde $\alpha(a)=pa$ (pg.147).

a)Să se arate că pentru orice complex de lanţuri $C=\oplus_n C_n$, cu C_n grupuri abeliene libere,avem

$$H_n(C)*Z_p\cong Tor(H_n(C),Z_p).$$

b)Construind un complex de lanţuri convenabil,să se arate că pentru oricare grup abelian A:

$$A*Z_p\cong Tor(A,Z_p).$$

Rezolvare :

a).Pe de o parte,din Exerciţiul 4.16,pentru $G=Z_p$,avem următorul şir exact:

$$0\longrightarrow H_n(C)\otimes Z_p\xrightarrow{\theta}H_n(C\otimes Z_p)\xrightarrow{(\partial\otimes 1)_*}Tor(H_{n-1}(C),Z_p)\longrightarrow 0,$$

pentru $\theta(\sum_i\{c_i\}\otimes g_i)=\{\sum_i c_i\otimes g_i\}$.

Pe de altă parte,din Teorema 4.5.15 ,avem şirul exact

$$0\longrightarrow H_n(C)\otimes Z_p\xrightarrow{\beta_*}H_n(C\otimes Z_p)\xrightarrow{\partial_*}H_{n-1}(C)*Z_p\longrightarrow 0,$$

unde $\beta_*=\theta$ .Avem prin urmare

$H_{n-1}(C)*Z_p\cong H_n(C\otimes Z_p)/Im\,\beta_*=H_n(C\otimes Z_p)/Im\,\theta\cong Tor(H_{n-1}(C),Z_p)$

b)Fie A un grup abelian oarecare şi fie şirul exact

$$0\longrightarrow R\xrightarrow{\alpha}F\xrightarrow{\beta}A\longrightarrow 0$$

cu F un grup abelian liber.Considerăm complexul de lanţuri $C=C_1\oplus C_0$,cu $C_1=R,C_0=F$ şi $\partial:C_1\longrightarrow C_0$, $\partial=\alpha$.

C_0 şi C_1 fiind grupuri abeliene libere,putem aplica (a) adică $H_0(C)*Z_p\cong Tor(H_0(C),Z_p)$.Dar $H_0(C)=C_0/C_1=F/R\cong A$.

4.18. Dat un complex simplicial K şi un cîmp F, fie h_n dimensiunea lui $H_n(K;F)$, ca spaţiu vectorial peste F. Caracteristica Euler-Poincaré a lui K, cu coeficienţi în F, se defineşte prin $\chi(|K|;F) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n h_n$.

Să se arate că are loc egalitatea $\chi(|K|;F) = \chi(|K|)$.

Rezolvare. Din definiţia caracteristicii Euler-Poincaré (cu coeficienţi întregi), avem $\chi(|K|) = \sum (-1)^n tr(f_*^n)$ (pg.149-150), pentru $f_*^n = Id: H_n(K;Q) \longrightarrow H_n(K;Q)$, care arată că $\chi(|K|) = \sum (-1)^n \beta_n$, unde $\beta_n = \dim_Q H_n(K;Q)$. Avem apoi din Lema 4.5.17, $\chi(|K|) = \sum (-1)^n \alpha_n$, cu α_n numărul n-simplexelor lui K.

Fie acum F un cîmp oarecare. După Propoziţia 4.5.10, $H_n(K;F)$ este spaţiu vectorial peste F şi după Ex. 4.16 avem izomorfismul de spaţii vectoriale:

$$H_n(K;F) \cong H_n(K) \otimes F \oplus Tor(H_{n-1}(K), F).$$

Prin urmare: $h_n = \dim(H_n(K) \otimes F) + \dim Tor(H_{n-1}(K), F)$. Avem apoi şirul exact $0 \longrightarrow B_{n-1}(K) \xrightarrow{\alpha} Z_{n-1}(K) \xrightarrow{\beta} H_{n-1}(K) \longrightarrow 0$, cu $Z_{n-1}(K)$ grup abelian liber. Din Exerciţiul 4.15 avem şirul exact:

$$0 \longrightarrow Tor(H_{n-1}(K), F) \longrightarrow B_{n-1}(K) \otimes F \longrightarrow Z_{n-1}(K) \otimes F \longrightarrow$$

$$H_{n-1}(K) \otimes F \longrightarrow 0 \quad \text{şi deci}$$

$\dim Tor(H_{n-1}(K), F) - \dim(B_{n-1}(K) \otimes F) + \dim(Z_{n-1}(K) \otimes F) - \dim(H_{n-1}(K) \otimes F) = 0$. Obţinem prin urmare: $\chi(|K|, F) = \sum (-1)^n [\dim(B_{n-1}(K) \otimes F) - \dim(Z_{n-1}(K) \otimes F)] = \sum (-1)^n [\dim(Z_n(K) \otimes F) + \dim(B_{n-1}(K) \otimes F]$. Din şirul exact $0 \longrightarrow Z_n(K) \otimes F \longrightarrow C_n(K) \otimes F \longrightarrow B_{n-1}(K) \otimes F \longrightarrow 0$ (Ex. 4.16) avem $\dim(Z_n(K) \otimes F) + \dim(B_{n-1}(K) \otimes F) = \dim_F(C_n(K) \otimes F) = \alpha_n$.

Prin urmare $\chi(|K|, F) = \sum (-1)^n \alpha_n = \chi(|K|)$.

1). Un complex de lanţuri, C, se numeşte aciclic dacă $H(C)=0$. Complexul C se numeşte contractibil dacă morfismul identitate 1_C este lanţ-omotop cu morfismul nul. Dacă C este contractibil, rezultă uşor că acesta este şi aciclic. In general, reciproc nu este adevărat. Se poate arăta totuşi că: un complex liber de lanţuri este aciclic dacă şi numai dacă este contractibil. Pentru demonstraţie se poate consulta, de exemplu, R. Miron şi I. Pop, Topologie algebrică. Omologie, Omotopie, Spaţii de acoperire. Ed. Acad. RSR, 1974, pg. 55.

2). Pentru studiul spaţiilor Lens (Exerciţiul 4.9) se mai poate consulta P.J. Hilton şi S. Wylie, Hology Theory, Mir, 1966, p. 211. Sînt considerate de asemenea spaţii Lens infinit-dimensionale $L^{\infty}(m)$, pentru care se poate consulta G.W. Whitehead, Elements of Homotopy Theory, Springer-Verlag, 1978, p. 91.

3). Există condiţii mai slabe decît cea din Exerciţiul 4.16 (grupurile C_n libere), pentru care şirul (4) din exerciţiul citat este scindat. De exemplu, complexul $Tor(C,G)$ să fie aciclic. Se poate consulta E.H. Spanier, Algebraic Topology, Mir, 1971, Teorema 14, p. 292.

4). Caracteristica Euler-Poincaré se poate defini şi pentru perechi simpliciale. De exemplu, prin $\chi(K,L) = \sum (-1)^n \alpha_n$, unde α_n este numărul n-simplexelor din K-L.

Dacă $H_n(K,L) = \underbrace{Z \oplus \ldots \oplus Z}_{\beta_n} \oplus Z_{n_1} \oplus \ldots \oplus Z_{n_k}$, atunci $\beta_n = \dim_Q H_n(K,L;Q)$ şi se numeşte n-numărul Betti al perechii (K,L), iar n_i (cu proprietatea că divide pe n_{i+1}) sînt n-coeficienţii de torsiune ai perechii (K,L). Avem $\chi(K,L) = \sum (-1)^n \beta_n$. Pentru aceste chestiuni se poate consulta, de exemplu, E.H. Spanier (op. cit.) p. 225.

5). In legătură cu Exerciţiul 4.9: In P.J. Hilton şi S. Wylie (op. cit. pg. 212) se arată că $L(p,q)$ şi $L(p,q')$ nu sînt echivalente omotopic decît dacă $qq' \equiv \pm m^2 \pmod p$. Aceasta cu toate că spaţiile respective au grupurile de cocmologie izomorfe (cum se vede şi din exerciţiul citat), nu au însă, excepînd condiţia enunţată, inelele de coomologie izomorfe. Astfel $L(5,1)$ şi $L(5,2)$ nu sînt echivalente omotopic. G.K. Whitehead a arătat (Ann. Math., 42(1941, p. 119) că, condiţia enunţată este necesară şi suficientă pentru echivalenţa omotopică. De exemplu $L(7,1)$ şi $L(7,2)$ sînt două 3-varietăţi echivalente omotopic, dar distincte (nehomeomorfe).

Capitolul 5: COOMOLOGIE SI TEOREME DE DUALITATE.

5.1. Fie K un complex simplicial cu o descompunere în blocuri şi fie L un bloc-subcomplex. Fie C complexul de lanţuri $\oplus C_n$, unde $C_n = H_n(M^n, M^{n-1})$ şi $M^n = K_n \cup L$; pentru orice grup abelian G, fixat, fie $C(G) = \oplus C_n(G)$ complexul de lanţuri definit prin $C_{-n}(G) = H^n(M^n, M^{n-1}; G)$. Să se arate că $C \wedge G$ şi $C(G)$ sînt complexe de lanţuri izomorfe, astfel că cele două moduri de generalizare la coomologie a metodei de calcul a omologiei, prin descompuneri în blocuri, coincid.

Rezolvare. Amintim că pentru $C(G)$ homomorfismul de frontieră este

$$\delta^n : H^n(M^n, M^{n-1}; G) \xrightarrow{i^*} H^n(M^n, L; G) \xrightarrow{\delta^*} H^{n+1}(M^{n+1}, M^n; G),$$

unde $i : (M^n, L) \hookrightarrow (M^n, M^{n-1})$ este incluziunea şi δ^* este homomorfismul de legătură pentru tripletul (M^{n+1}, M^n, L). Apoi, complexul $C \wedge G$ se defineşte prin :

$C \wedge G = \oplus (C \wedge G)_{-n} = \oplus C_n \wedge G = \oplus [H_n(M^n, M^{n-1}) \wedge G]$ şi homomorfismul de frontieră este:

$$\delta' : H_n(M^n, M^{n-1}) \wedge G \xrightarrow{i_* \wedge 1_G} H_n(M^n, L) \wedge G \xrightarrow{\partial_* \wedge 1_G} H_{n+1}(M^{n+1}, M^n) \wedge G$$

Deoarece $\Delta_r(M^n, M^{n-1})$ sînt grupuri libere şi $H_{n-1}(M^n, M^{n-1}) = 0$, rezultă din Exerciţiul 5.5, care urmează în paginile următoare, că există un izomorfism $\varphi_n : H^n(M^n, M^{n-1}; G) \cong H_n(M^n, M^{n-1}) \wedge G$, care, cum se va vedea, face comutativă următoarea diagramă:

$$\begin{array}{ccccc} H^n(M^n, M^{n-1}; G) & \xrightarrow{i^*} & H^n(M^n, L; G) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{n+1}(M^{n+1}, M^n; G) \\ \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n+1} \\ H_n(M^n, M^{n-1}) \wedge G & \xrightarrow{i_* \wedge 1_G} & H_n(M^n, L) \wedge G & \xrightarrow{\partial_* \wedge 1_G} & H_{n+1}(M^{n+1}, M^n) \wedge G \end{array}$$

Rezultă deci că φ_n definesc un izomorfism de complexe de lanţuri

5.2. Să se arate că/un "cap" produs $H^r(X; G) \otimes H_n(X; G) \longrightarrow H_{n-r}(X; G)$ poate fi definit pentru un spaţiu arbitrar X astfel. Dat un generator λ al lui $S_n(X)$, fie $\lambda' = \lambda \circ F_1$ şi $\lambda'' = \lambda \circ F_2$, unde

$F_1: \Delta_{n-r} \longrightarrow \Delta_n$ şi $F_2: \Delta_r \longrightarrow \Delta_n$ sînt definite prin $F_1=(a^0,\ldots,a^{n-r})$ şi $F_2=(a^{n-r},\ldots,a^n)$. Dat de asemenea $\alpha \in S_r(X) \curlywedge G$ definim :

(*) $\alpha \cap (\sum \lambda_i \otimes g_i) = \sum \lambda_i' \otimes (\alpha(\lambda_i'')g_i)$;

(a) Să se arate că formula aceasta defineşte un "cap"produs între coomologie şi omologie;

(b) Să se arate că dacă X este un poliedru, atunci "cap" produsul astfel definit coincide cu cel din Propoziţia 5.2.10;

(c) Dacă $f:X \longrightarrow Y$ este o aplicaţie continuă, atunci avem

$$f_*(f^*(x) \cap y) = x \cap f_*(y).$$

Rezolvare. Prin formula (*) avem definită o aplicaţie $(S_r(X) \curlywedge G) \times (S_n(X) \otimes G) \longrightarrow S_{n-r}(X) \otimes G$. Să arătăm că are loc relaţia:

(**) $(\partial \otimes 1)(\alpha \cap c) = \alpha \cap (\partial \otimes 1)(c) + (-1)^{n-r} \delta(\alpha) \cap c$, pentru $\forall \alpha \in S_r(X) \curlywedge G$ şi $c \in S_n(X) \otimes G$.

Este suficient să considerăm cazul $c = \lambda \otimes g$. Avem atunci:

(1) $(\partial \otimes 1)(\alpha \cap c) = (\partial \otimes 1)(\alpha \cap (\lambda \otimes g)) = (\partial \otimes 1)(\lambda' \otimes \alpha(\lambda'')g) =$

$= \partial(\lambda') \otimes \alpha(\lambda'')g = \sum_{h=0}^{n-r} (-1)^h \lambda F_1 F^h \otimes \alpha(\lambda F_2)g$, cu

$F_1: \Delta_{n-r} \longrightarrow \Delta_n$, $F_2: \Delta_r \longrightarrow \Delta_n$ definite prin $F_1=(a^0,\ldots,a^{n-r})$ şi $F_2=(a^{n-r},\ldots,a^n)$.

Apoi:

(2) $\alpha \cap (\partial \otimes 1)(\lambda \otimes g) = \alpha \cap (\partial\lambda \otimes g) = \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \alpha \cap (\lambda F^h \otimes g) =$

$= \sum_{h=0}^{n} (-1)^h (\lambda F^h)' \otimes \alpha((\lambda F^h)'')g =$

$= \sum_{h=0}^{n} (-1)^h (\lambda F^h F_1') \otimes \alpha(\lambda F^h F_2')g$, unde $F_1': \Delta_{n-r-1} \longrightarrow \Delta_{n-1}$ şi $F_2': \Delta_r \longrightarrow \Delta_{n-1}$ sînt definite prin $F_1'=(a^0,\ldots,a^{n-r-1})$ şi $F_2'=(a^{n-r-1},\ldots,a^{n-1})$. In sfîrşit, avem:

(3) $\delta(\alpha) \cap c = \delta(\alpha) \cap (\lambda \otimes g) = \lambda^{(1)} \otimes (\delta(\alpha)(\lambda^{(2)}))g =$

$= \lambda(0) \otimes \alpha(\partial\lambda^{(n)})g = (\lambda F_1^n) \otimes \alpha(\partial(\lambda F_2^n))g =$

$= \sum_{h=0}^{r+1} (-1)^h (\lambda F_1^n) \otimes \alpha(\lambda F_2^n F^h)g$, unde

$F_1^n : \Delta_{n-r-1} \longrightarrow \Delta_n$, $F_2^n : \Delta_{r+1} \longrightarrow \Delta_n$, cu

$F_1^n = (a^0, \ldots, a^{n-r-1})$, $F_2^n = (a^{n-r-1}, \ldots, a^n)$.

Se obţin apoi uşor următoarele relaţii:

(4) $F_1 F^h = F^h F_1'$ şi $F^h F_2' = F_2$, dacă $h \leq n-r-1$,

$F_1^n = F_1 F^{n-r}$, $F_2^n F^0 = F_2$ şi

$F^h F_1' = F_1^n$, $F^h F_2' = F_2^n F^{h-(n-r-1)}$, dacă $h \geq n-r$.

Din (2), (3), (4) deducem:

$\alpha \wedge (\partial \otimes 1)(c) + (-1)^{n-r} \delta(\alpha) \wedge c =$

$= \sum_{h=0}^{n-r-1} (-1)^h (\lambda F^h F_1') \otimes \alpha(\lambda F^h F_2') g +$

$+ \sum_{h=n-r}^{n} (-1)^h (\lambda F^h F_1') \otimes \alpha(\lambda F^h F_2') g +$

$+ \sum_{h=n-r}^{n} (-1)^{h+1} (\lambda F_1^n) \otimes \alpha(\lambda F_2^n F^{h-(n-r-1)}) g +$

$+ (-1)^{n-r} \lambda F_1 F^{n-r} \otimes \alpha(\lambda F_2) g = \sum_{h=0}^{n-r-1} (-1)^h (\lambda F_1 F^h) \otimes \alpha(\lambda F_2) g +$

$+ (-1)^{n-r} (\lambda F_1 F^{n-r}) \otimes \alpha(\lambda F_2) g = (\partial \otimes 1)(\alpha \wedge c)$.

Aşadar are loc ($*\,*$). Aceasta arată că putem defini homomorfismul:

$\wedge : H^r(X;G) \otimes H_n(X;G) \longrightarrow H_{n-r}(X;G)$ prin

$x \wedge y = [\alpha \wedge c]$, dacă $x = [\alpha]$ şi $y = [c]$.

In adevăr, dacă $\alpha \in S_r(X) \wedge G$ este un ciclu şi c un ciclu, atunci din ($**$) deducem că $(\partial \otimes 1)(\alpha \wedge c) = 0$, deci $\alpha \wedge c$ este un ciclu şi deci defineşte un element în $H_{n-r}(X;G)$. Apoi, dacă α este o cofrontieră şi c un ciclu, avem $\alpha \wedge c = \delta\beta \wedge c = (-1)^{n-r}(\partial \otimes 1)(\beta \otimes c)$ adică $\alpha \wedge c$ este o frontieră. In mod analog, dacă α este un cociclu şi c o frontieră, atunci $\alpha \wedge c = \alpha \wedge (\partial \otimes 1)(d) = (\partial \otimes 1)(\alpha \wedge d)$.

Rezultă că aplicaţia $\cap$ este bine definită. Este evident un homomorfism de grupuri.

(b) Dacă $X = |K|$, atunci (Definiţia 4.3.2 şi Propoziţia 4.3.3) există echivalenţa de lanţuri $\alpha : S(|K|) \longrightarrow \Delta(K) \longrightarrow C(K)$ cu inversa $\beta : C(K) \longrightarrow S(|K|)$ (vezi şi Definiţia 4.3.8 şi Teorema 4.3.9). Fie $f \in C_r(K) \pitchfork G$ şi $\sum \sigma_i \otimes g_i \in C_n(K) \otimes G$. Putem considera atunci $f \cap (\sum \sigma_i \otimes g_i) \in C_{n-r}(K) \otimes G$. Pe de altă parte, $f\alpha \in S_r(|K|) \pitchfork G$ şi $\sum \beta(\sigma_i) \otimes g_i \in S_n(|K|) \otimes G$ încît putem considera $(f\alpha) \cap \sum \beta(\sigma_i) \otimes g_i$. Se poate arăta acum că are loc relaţia: $(\beta \otimes 1)(f \cap \sum \sigma_i \otimes g_i) = (f\alpha) \cap \sum \beta(\sigma_i) \otimes g_i$. In adevăr, membrul I este $(\beta \otimes 1)(\sum \sigma_i' \otimes f(\sigma_i'') g_i = \sum \alpha(\sigma_i') \otimes f(\sigma_i'') g_i$, iar membrul II este $\sum (\beta(\sigma_i))' \otimes (f\alpha)(\beta(\sigma_i)'') g_i$. Dar $\beta(\sigma_i') = \beta(\sigma_i)'$ şi $\beta(\sigma_i'') = \beta(\sigma_i)''$ deoarece β este indusă de incluziunea $\Delta(K) \longrightarrow S(|K|)$. Apoi $f(\sigma_i'') = f(\alpha\beta)(\sigma_i'') = (f\alpha)(\beta(\sigma_i)'')$, deoarece $\alpha\beta = 1$ (Propoziţia 4.3.3). Din relaţia stabilită, rezultă că pentru $x \in H^r(K;G)$ şi $y \in H_n(K;G)$ are loc egalitatea $\beta_*(x \cap y) = \alpha^*(x) \cap \beta_*(y)$.

(c). Este suficient să arătăm că are loc următoarea relaţie: $(f \otimes 1)(uf \cap (\lambda \otimes g)) = u \cap (f\lambda \otimes g)$, pentru $u \in S_r(Y) \pitchfork G$, $\lambda \in S_n(X)$ şi $g \in G$. Avem $(f \otimes 1)(uf \cap (\lambda \otimes g)) = (f \otimes 1)(\lambda' \otimes (uf)(\lambda'')g) = f(\lambda') \otimes (uf)(\lambda'')g = f(\lambda') \otimes u(f(\lambda''))g = (f\lambda)' \otimes u((f\lambda)'')g$, deoarece $f(\lambda') = (f\lambda)'$ şi $f(\lambda'') = (f\lambda)''$.

5.3. Dat un şir exact de grupuri abeliene $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ şi un alt grup abelian G, să se arate că şirul

$$0 \longrightarrow C \pitchfork G \xrightarrow{\beta \pitchfork 1} B \pitchfork G \xrightarrow{\alpha \pitchfork 1} A \pitchfork G$$

este exact, dar că $\alpha \pitchfork 1$ poate să nu fie epimorfism.

Rezolvare. Fie $u \in C \pitchfork G$, astfel încît $(\beta \pitchfork 1)(u) = 0$, adică $u\beta = 0$ şi cum β este epimorfism, rezultă $u = 0$, deci $\beta \pitchfork 1$ este monomorfism. Avem apoi $(\alpha \pitchfork 1)(\beta \pitchfork 1) = \beta\alpha \pitchfork 1 = 0$, deci

$\mathrm{Im}(\beta \otimes 1) \subseteq \mathrm{Ker}(\alpha \otimes 1)$. In sfîrşit, dacă $(\alpha \otimes 1)(v)=0$, adică $v\alpha=0$, definim $u:C \longrightarrow G$, prin $u(c)=v(b)$, pentru $c \in C$, cu $c=\beta(b)$. Aplicaţia u este bine definită, deoarece dacă avem şi $c=\beta(b')$, rezultă $\beta(b-b')=0$ şi deci $b-b'=\alpha(a)$, care arată că $v(b)-v(b')=v\alpha(a)=0$. Apoi este evident că u este un homomorfism şi $(\beta \otimes 1)(u)=u\beta=v$. Avem deci $\mathrm{Ker}(\alpha \otimes 1) \subseteq \mathrm{Im}(\beta \otimes 1)$.

Drept contraexemplu că $\alpha \otimes 1$ este epimorfism, fie şirul exact

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} Z_2 \longrightarrow 0$$

şi $G=Z$, cu $\alpha(n)=2n$. Avem atunci şirul exact

$$0 \longrightarrow Z_2 \otimes Z=0 \xrightarrow{\beta \otimes 1} Z \otimes Z \xrightarrow{\alpha \otimes 1} Z \otimes Z,$$

dar $\alpha \otimes 1$ nu este epimorfism. In adevăr, fie $u \in Z \otimes Z$ definit prin $u(1)=1$. Atunci, fie $v \in Z \otimes Z$. Dacă avem $(\alpha \otimes 1)(v)=u$, rezultă $v(\alpha(1))=u(1)=1$, adică $v(2)=1$, ceea ce este imposibil, deoarece $v:Z \longrightarrow Z$ este un homomorfism.

5.4. Date grupurile abeliene A şi B, scriem A sub forma F/R, unde F este un grup abelian liber, încît există şirul exact

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0$$

Definim $\mathrm{Ext}(A,B)=(R \otimes G)/\mathrm{Im}(\alpha \otimes 1)$, astfel că prin Exerciţiul 5.3 există un şir exact

$$0 \longrightarrow A \otimes G \xrightarrow{\beta \otimes 1} F \otimes G \xrightarrow{\alpha \otimes 1} R \otimes G \longrightarrow \mathrm{Ext}(A,B) \longrightarrow 0$$

Să se stabilească următoarele proprietăţi pentru $\mathrm{Ext}(A,B)$.

(a) $\mathrm{Ext}(A,B)$ depinde numai de A şi B şi nu de reprezentarea particulară $A=F/R$.

(b) $\mathrm{Ext}(\bigoplus_i A_i, \bigoplus_j B_j) \cong \bigoplus_{i,j} \mathrm{Ext}(A_i,B_j)$, dacă ambele sume directe sînt finite.

(c) $\mathrm{Ext}(A,B)=0$, dacă A este un grup abelian liber;

$\mathrm{Ext}(Z_p,Z) \cong Z_p$, $\mathrm{Ext}(Z_p,Z_q) \cong Z_{(p,q)}$, $\mathrm{Ext}(Z_p,Q)=0$, pentru orice p,q întregi pozitive.

Rezolvare. (a) Fie $f:A' \longrightarrow A$ un homomorfism de grupuri abeliene şi fie $A=F/R$, $A'=F'/R'$. Există atunci diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\alpha} & F & \xrightarrow{\beta} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle f_2} & & \uparrow{\scriptstyle f_1} & & \uparrow{\scriptstyle f} & & \\ 0 & \longrightarrow & R' & \xrightarrow{\alpha} & F' & \xrightarrow{\beta'} & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(vezi Propoziţia 1.3.37).

Dacă B este un grup abelian arbitrar atunci există diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A\otimes B & \xrightarrow{\beta\otimes 1} & F\otimes B & \xrightarrow{\alpha\otimes 1} & R\otimes B & \xrightarrow{p} & \mathrm{Ext}(A,B) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f\otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle f_1\otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2\otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}} \\ 0 & \longrightarrow & A'\otimes B & \xrightarrow{\beta'\otimes 1} & F'\otimes B & \xrightarrow{\alpha'\otimes 1} & R'\otimes B & \xrightarrow{p'} & \mathrm{Ext}(A',B) \longrightarrow 0 \end{array}$$

unde $\overline{f}$ este definit astfel: dacă $z \in \mathrm{Ext}(A,B)$, scriem $z=p(u)$ cu $u \in R\otimes B$ şi luăm $\overline{f}(z)=p'(f_2\otimes 1)(u)$. Se constată imediat că $\overline{f}$ este bine definit, este homomorfism şi este unic pentru f_1 şi f_2 fixate. Putem arăta că de fapt $\overline{f}$ nu depinde nici de f_1 şi f_2. Dacă le înlocuim pe acestea cu f_1' şi respectiv f_2', obţinem din rezolvarea Exerciţiului 4.15, că $f_1'=f_1+\alpha h$, $f_2'=f_2+h\alpha'$, pentru $h: F' \longrightarrow R$ un homomorfism.

Dacă $\overline{f}'$ este homomorfismul construit cu f_1' şi f_2', avem: $\overline{f}'(z)=p'(f_2'\otimes 1)(u)=p'(uf_2')=p'(uf_2+uh\alpha')=p'uf_2+p'(\alpha'\otimes 1)(uh)=\overline{f}(z)$. În felul acesta homomorfismul $\overline{f}$ este unic. În particular, putem lua A şi rezultă imediat că $\mathrm{Ext}(A,B)$ nu depinde de reprezentarea F/R a grupului A.

(b) Considerăm şirurile exacte

$$0 \longrightarrow R_i \xrightarrow{\alpha_i} F_i \xrightarrow{\beta_i} A_i \longrightarrow 0$$

cu F_i grupuri abeliene libere. Atunci, pe de o parte avem şirurile exacte de grupuri abeliene:

$$0 \longrightarrow A_i\otimes B_j \xrightarrow{\beta_i\otimes 1} F_i\otimes B_j \xrightarrow{\alpha_i\otimes 1} R_i\otimes B_j \longrightarrow \mathrm{Ext}(A_i,B_j) \longrightarrow 0$$

şi luînd suma directă (finită), după i şi j obţinem şirul exact

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i,j}(A_i\otimes B_j) \longrightarrow \bigoplus_{i,j} F_i\otimes B_j \longrightarrow \bigoplus_{i,j} R_i\otimes B_j \longrightarrow \bigoplus_{i,j}\mathrm{Ext}(A_i,B_j) \longrightarrow 0$$

adică

$$0 \longrightarrow A \otimes B \xrightarrow{\beta \otimes 1} F \otimes B \xrightarrow{\alpha \otimes 1} R \otimes B \longrightarrow \bigoplus_{i,j} \mathrm{Ext}(A_i, B_j) \longrightarrow 0,$$

unde $A = \bigoplus_i A_i$, $B = \bigoplus_j B_j$, $R = \bigoplus_i R_i$ şi $F = \bigoplus_i F_i$, $\alpha = \bigoplus_i \alpha_i$ şi $\beta = \bigoplus_i \beta_i$. Pe de altă parte, avem ţirul exact

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0 \text{ şi prin urmare}$$

$$0 \longrightarrow A \otimes B \xrightarrow{\beta \otimes 1} F \otimes B \xrightarrow{\alpha \otimes 1} R \otimes B \longrightarrow \mathrm{Ext}(A,B) \longrightarrow 0.$$

Comparînd cele două şiruri exacte, decuem izomorfismul

$$\mathrm{Ext}(A,B) \cong \bigoplus_{i,j} \mathrm{Ext}(A_i, B_j).$$

(c) Dacă A este un grup abelian liber, avem şirul exact

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{1_A} A \longrightarrow 0$$

şi deci şirul exact

$$0 \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(A,B) \longrightarrow 0,$$

care arată că $\mathrm{Ext}(A,B)=0$.

Pentru Z_p putem considera şirul exact

$$0 \longrightarrow pZ \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{p} Z_p \longrightarrow 0$$

Pentru $B=Z$, avem şirul exact

$$0 \longrightarrow Z_p \otimes Z = 0 \longrightarrow Z \otimes Z \xrightarrow{i \otimes 1} pZ \otimes Z \longrightarrow \mathrm{Ext}(Z_p, Z) \longrightarrow 0$$

Avem însă izomorfismele $Z \otimes Z \cong Z$, prin $u \longmapsto u(1)$ şi $pZ \otimes Z \cong Z$, prin $v \longmapsto v(p)$. Atunci obţinem şirul exact

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow Z \xrightarrow{i'} Z \longrightarrow \mathrm{Ext}(Z_p, Z) \longrightarrow 0$$

unde $i'(n)=np$. Prin urmare, $\mathrm{Ext}(Z_p, Z) \cong Z/\mathrm{Im}\, i' \cong Z/pZ \cong Z_p$.

Dacă $B=Z_q$, avem şirul exact

$$0 \longrightarrow Z_p \otimes Z_q \xrightarrow{p \otimes 1} Z \otimes Z_q \xrightarrow{i \otimes 1} pZ \otimes Z_q \longrightarrow \mathrm{Ext}(Z_p, Z_q) \longrightarrow 0$$

Avem izomorfismele $Z \otimes Z_q \cong Z_q$, prin $u \longmapsto u(1)$ şi $pZ \otimes Z_q \cong Z_q$, prin $v \longmapsto v(p)$. Deducem ca şi mai sus $\mathrm{Ext}(Z_p, Z_q) \cong Z_q/pZ_q$. Putem arăta că există un izomorfism $\phi : Z_q/pZ_q \longrightarrow Z_d$, $d=(p,q)$. Definim $\phi(\hat{h} + pZ_q) = \widehat{\widehat{h}}$.

Acesta este bine definit, deoarece dacă $\hat{h}_1 + pZ_q = \hat{h} + pZ_q$, atunci $h_1 - h = p\ell + q\ell' = (p_1\ell + q_1\ell')d$, deci $\widehat{\widehat{h}_1} = \widehat{\widehat{h}}$. ϕ este monomorfism

deoarece, dacă $\phi(\hat{h}+pZ_q)=\hat{\hat{h}}=0$, rezultă $h=dh'=(pl+ql')h'$ şi deci $\hat{h}+pZ_q=0$. ϕ este epimorfism: $\hat{h}=\phi(\hat{h}+pZ_q)$.

Avem deci $Ext(Z_p,Z_q)\cong Z_{(p,q)}$.

In sfîrşit, dacă $B=Q$, atunci homomorfismul

$\alpha\otimes 1: Z\otimes Q \longrightarrow pZ\otimes Q$ este un epimorfism. In adevăr, dacă $v\in pZ\otimes Q$, definim $u\in Z\otimes Q$, prin $u(n)=\frac{v(n)}{p}$. Avem atunci $((\alpha\otimes 1)(u)(n)=(u\alpha)(n)=u(pn)=pu(n)=v(n)$, deci $Ext(Z_p,Q)=0$.

5.5. Fie C un complex de lanţuri în care oricare C_n este un grup abelian liber şi fie G un grup abelian. Să se arate că:

$$H_{-n}(C\otimes G)\cong H_n(C)\otimes G\oplus Ext(H_{n-1}(C),G).$$

Rezolvare. Ca în Exerciţiul 4.15, avem şirul scindat

$$0\longrightarrow Z_n(C)\xrightarrow{\alpha_n} C_n\xrightarrow{\partial} B_{n-1}(C)\longrightarrow 0$$

Deoarece $B_{n-1}(C)$ este liber avem şirul scindat

$$0\longrightarrow B_{n-1}(C)\otimes G\xrightarrow{\partial\otimes 1} C_n\otimes G\xrightarrow{\alpha_n\otimes 1} Z_n(C)\otimes G\longrightarrow 0$$

(rezultă uşor din Ex. 5.1.). Rezultă, dacă considerăm complexele de lanţuri $Z(C)\otimes G=\bigoplus_n Z_n(C)\otimes G$, $B(C)\otimes G=\bigoplus_n B_{n-1}(C)\otimes G$, cu homomorfismele de frontieră triviale, şirul exact de complexe de lanţuri

$$0\longrightarrow B(C)\otimes G\xrightarrow{\partial\otimes 1} C\otimes G\xrightarrow{\alpha\otimes 1} Z(C)\otimes G\longrightarrow 0.$$

Acesta induce şirul exact de omologie

$$\cdots H_{-n+1}(Z(C)\otimes G)\xrightarrow{\delta_*} H_{-n}(B(C)\otimes G)\xrightarrow{(\partial\otimes 1)_*} H_{-n}(C\otimes G)\xrightarrow{(\alpha\otimes 1)_*} H_{-n}(Z(C)\otimes G)$$

Dar $H_{-n}(Z(C)\otimes G)=Z_n(C)\otimes G$ şi $H_{-n}(B(C)\otimes G)=B_{n-1}(C)\otimes G$

astfel încît obţinem şirul exact

$$\cdots\to Z_{n-1}(C)\otimes G\xrightarrow{\beta_{n-1}\otimes 1} B_{n-1}(C)\otimes G\xrightarrow{(\partial\otimes 1)_*} H_{-n}(C\otimes G)\xrightarrow{(\alpha\otimes 1)_*} Z_n(C)\otimes G\longrightarrow$$
$$\xrightarrow{\beta_n\otimes 1} B_n(C)\otimes G\to\cdots$$

Din acest şir exact deducem şirul scurt exact:

$0 \to \operatorname{coker}(\beta_{n-1} \otimes 1) = \frac{B_{n-1}(C) \otimes G}{\operatorname{Im}(\beta_{n-1} \otimes 1)} \xrightarrow{\theta} H_n(C \otimes G) \to \operatorname{Ker}(\beta_n \otimes 1) \to 0,$

unde $\theta(\hat{x}) = (\partial \otimes 1)(x)$.

Avem de asemenea $\operatorname{Ker}(\beta_n \otimes 1) \cong H_n(C) \otimes G$, iar din şirul exact

$0 \longrightarrow B_{n-1}(C) \xrightarrow{\beta_{n-1}} Z_{n-1}(C) \longrightarrow H_{n-1}(C) \longrightarrow 0,$

cu $Z_n(C)$ grup abelian liber, rezultă $\operatorname{coker}(\beta_{n-1} \otimes 1) = \operatorname{Ext}(H_{n-1}(C), G)$. Obţinem astfel şirul exact

$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}(H_{n-1}(C), G) \xrightarrow{\theta} H_n(C \otimes G) \xrightarrow{(\alpha \otimes 1)_*} H_n(C) \otimes G \longrightarrow 0$

Arătăm că acest şir este scindat. Ca în Exerciţiul 4.16 există $h_n : B_{n-1}(C) \longrightarrow C_n$, încît $\partial_n h_n = 1$. Acest homomorfism induce $h_n \otimes 1 : C_n \otimes G \longrightarrow B_{n-1}(C) \otimes G$, care la rîndul său defineşte $t : H_n(C;G) \longrightarrow \operatorname{coker}(\beta_{n-1} \otimes 1) = \operatorname{Ext}(H_{n-1}(C), G)$ prin $t([z]) = (\widehat{h_n \otimes 1})(z)$. În adevăr, dacă $[z_1] = [z_2]$, atunci $z_1 - z_2 = (\widehat{\partial \otimes 1})(u)$ şi prin urmare $(h_n \otimes 1)(z_1) - (h_n \otimes 1)(z_2) = (h_n \otimes 1)(\partial \otimes 1)(u) = (\partial h_n \otimes 1)(u) = \widehat{w}_{B_{n-1}(C)} = (\beta_{n-1} \otimes 1)(u \,/\, Z_{n-1}(C)) \in \operatorname{Im}(\beta_{n-1} \otimes 1)$.

În sfîrşit, avem $t\theta(\hat{x}) = t(\partial \otimes 1)(x) = (h_n \otimes 1)(\partial \otimes 1)(\hat{x}) = (\partial h_n \otimes 1)(\hat{x}) = \hat{x}$, adică $t\theta = Id$, care arată că şirul este scindat şi avem deci $H_n(C \otimes G) \cong H_n(C) \otimes G \oplus \operatorname{Ext}(H_{n-1}(C), G)$.

Putem completa exerciţiul stabilind caracterul natural al izomorfismului de mai sus. Anume, dacă $\varphi : C \longrightarrow C'$ este o aplicaţie de lanţuri, cu C_n şi C'_n grupuri abeliene libere rezultă, utilizînd şi Exerciţiul 5.4, că are loc diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \operatorname{Ext}(H_{n-1}(C), G) & \longrightarrow & H_n(C \otimes G) & \longrightarrow & H_n(C) \otimes G & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \operatorname{Ext}(\varphi_*, 1)} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_*} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_* \otimes 1} & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Ext}(H_{n-1}(C'), G) & \longrightarrow & H_{n-1}(C' \otimes G) & \longrightarrow & H_n(C') \otimes G & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Cînd $H_{n-1}(C) = 0$ şi $H_{n-1}(C') = 0$, obţinem rezultatul necesar Ex 5.1.

5.6. Dacă în Exercițiul 5.5 orice grup C_n este finit generat, să se arate că

$$H_{-n}(C \curlywedge G) \cong H_n(C) \otimes G \oplus Tor(H_{-n-1}(C \curlywedge Z), G)$$

Rezolvare. Din Propoziția 5.2.15 există un izomorfism de lanțuri $\Theta : (C \curlywedge Z) \otimes G \longrightarrow C \curlywedge G$. Acesta implică izomorfismul $\theta_* : H_{-n}((C \curlywedge Z) \otimes G) \cong H_{-n}(C \curlywedge G)$. Dar, aplicînd Exercițiul 4.16, avem $H_{-n}((C \curlywedge Z) \otimes G) \cong H_{-n}(C \curlywedge Z) \otimes G \oplus Tor(H_{-n-1}(C), G)$. Rezumînd, obținem izomorfismul din enunț.

5.7. Fie M o n-varietate omologică orientabilă închisă. Să se arate că $H_{n-1}(M)$ este un grup abelian liber.

Rezolvare. Din Teorema de dualitate Alexander-Poincaré (5.3.13, pg.179), avem $H_{n-1}(M) \cong H^1(M)$. Cu Propoziția 5.2.17, avem $H^1(M) \cong FH_1(M) \oplus TH_0(M) = FH_1(M)$. Prin urmare $H_{n-1}(M) \cong FH_1(M)$ care este un grup abelian liber.

5.8. Să se arate că o n-varietate omologică (cu sau fără bord) este o n-varietate în sensul Definițiilor 3.4.1 și 5.4.1, dacă $n \leq 3$.

Rezolvare. Pentru n=0, M se reduce la un punct și evident acesta este o 0-varietate.

Pentru n=1, $|Lk(x)|$ este echivalent omotopic cu S^0 sau cu un punct și deci M nu poate fi decît un segment sau un cerc, deci o 1-varietate.

Fie n=2 și $M = |K|$ o 2-varietate omologică (cu bord sau fără). Atunci dim K=2 și fiecare 1-simplex este față pentru un 2-simplex sau pentru două 2-simplexe (vezi Propoziția 5.3.3). Mai avem că $\tilde{H}_0(|Lk(a)|) = 0$, deci $|Lk(a)|$ este liniar conex. Se poate aplica demonstrația din Teorema 3.4.9 și rezolvarea Exercițiului 3.16. Rezultă că M este homeomorf cu spațiul obținut dintr-un poligon regulat în R^2 identificînd muchiile după regula $aBa^{-1}C$ (unde B și C constau din cîte o singură literă, sau $B = C^{-1}$ sau $C = \phi$). Astfel, ținînd seama de Teorema 3.4.11 și de Exercițiul

3.16, rezultă că M este o 2-varietate.

Fie acum n=3 şi $x \in M-|L|$. Fie $L=Lk_K(x)$. După Lema 5.4.7, avem, $\forall\, y \in |L|$, $\tilde{H}_{n-1}(|Lk_L(y)|) \cong \tilde{H}_n(S^2)$, adică $H_{n-1}(|Lk_L(y)|)$ este izomorf cu $\tilde{H}_{n-1}(S^1)$ sau cu 0. Prin urmare, |L| este o 2-varietate omologică şi, în baza celor de mai sus, |L| este chiar o 2-varietate. Prin urmare |L| este homeomorf cu M_g^r sau cu N_h^r (r putînd fi şi zero). Dar $\tilde{H}_1(|L|)=\tilde{H}_1(S^2)=0$ şi după Teorema 4.4.28 (şi pentru cazul cu bord), rezultă că |L| nu poate fi decît M_0 sau N_0^1, adică sau sfera S^2 sau discul E^2.

Considerăm acum vecinătatea simplicială a unui punct $x \in |K|$. Atunci $|St_K(x)| = |x * Lk_K(x)|$ şi deci acest spaţiu este homeomorf cu $x * S^2$ sau cu $x * E^2$. Avem apoi (Propoziţia 2.4.3) că $st_K(x) = |St_K(x)| - |Lk_K(x)|$ este o mulţime deschisă în |K|. Dar $x * S^2 - S^2$ este homeomorfă cu Int E^2, deci cu o mulţime deschisă din R^3, iar $x * E^2 - E^2$ este homeomorfă cu o mulţime deschisă din R^3_+. Prin urmare, fiecare punct $x \in M$ are o vecinătate homeomorfă cu o mulţime deschisă din R^3_+, care arată că M este o 3-varietate, cu sau fără de bord.

5.9. Rezultatul Exerciţiului 5.8 nu are loc dacă $n \geq 4$. De exemplu, fie X spaţiul obţinut dintr-un dodecaedru solid făcînd identificările pe frontieră, ca în Exemplul 3.3.22. Să se arate că X este o 3-varietate triangulabilă şi că $\pi_1(X) \cong G_p\{a,b;a^3(ab)^{-2}, b^5(ab)^{-2}\}$.

(b) Să se arate că $H_3(X) \cong Z$ şi să se deducă din Exerciţiul 4.3 şi din Teorema 5.3.17, că $H_1(X)=H_2(X)=0$, astfel că X are aceleaşi grupuri de omologie ca şi S^3.

(c) Să se arate că suspensia SX a lui X este o 4-varietate omologică simplu-conexă, dar nu este 4-varietate.

Rezolvare: (a) Spaţiul X se obţine dintr-un dodecaedru solid identificînd feţele opuse după o rotaţie directă de unghi $\pi/5$. Prin proiecţie stereografică din mijlocul unei feţe, dodecaedrul

se prezintă ca în Fig. 30

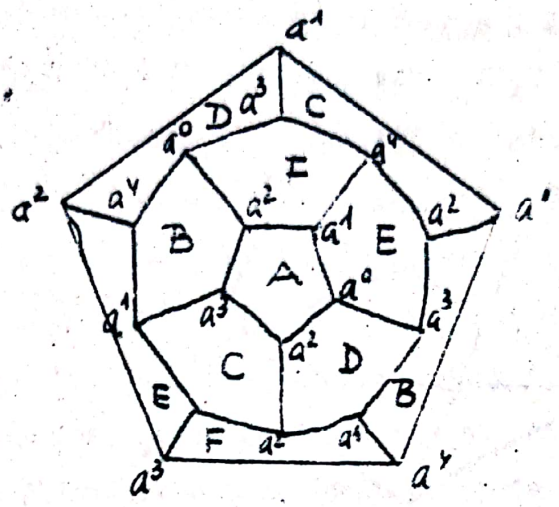


Fig. 30

Dacă notăm cu O centrul dodecaedrului solid $\mathcal{D}$, atunci avem $\mathcal{D} = |O * Y|$ unde Y este frontiera lui $\mathcal{D}$, fiecare față a acesteia fiind triangulată ca în Fig. 31

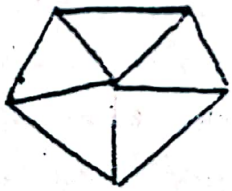


Fig. 31

Obținem deci o triangulare a lui $\mathcal{D}$; $O * Y$. Considerînd divizarea baricentrică a acesteia $(O * Y)'$ și apoi făcînd identificările necesare pentru a obține spațiul X se obține o triangulare a acestuia. Prin urmare X este un poliedru. Să arătăm acum că X este o 3-varietate. Fie $x \in X$. Dacă x este din $\operatorname{Int} \mathcal{D}$, atunci este evident că are o vecinătate homeomorfă cu o mulțime deschisă din R^3, care se menține prin identificare. Dacă x este punct din X obținut identificînd două puncte situate pe fețe opuse ale lui $\mathcal{D}$, nefiind vîrfuri, rezultă iarăși o vecinătate deschisă pentru x homeomorfă cu un deschis din R^3. În sfîrșit, să presupunem că x

se obţine identificînd vîrfurile a^0. Atunci x are o vecinătate constînd din patru părţi, care lipite dau o mulţime deschisă din R^3. Rezultă deci că X este o 3-varietate triangulabilă închisă. Pentru a calcula $\pi_1(X)$, fie L scheletul 1-dimensional al lui X, care este reprezentat în Fig. 32

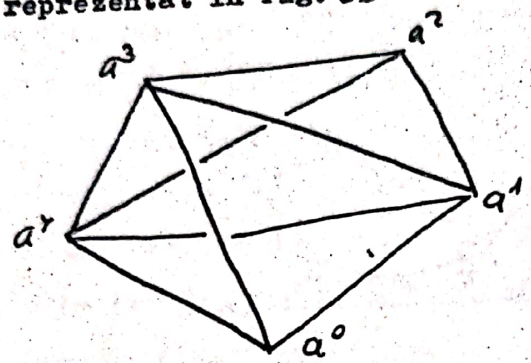


Fig. 32

Atunci Y se obţine făcînd adjuncţia a şase 2-celule A,B,C,D,E şi F după drumurile de muchii $a^0a^1a^2a^3a^4a^0$, $a^0a^4a^1a^3a^2a^0$, $a^0a^4a^2a^1a^3a^0$, $a^0a^3a^2a^4a^1a^0$, $a^0a^2a^1a^4a^3a^0$. Se poate calcula $\pi_1(L,a^0)$. Un arbore maximal este $(a^0,a^1),(a^0,a^2),(a^0,a^3),(a^0,a^4)$ şi $\pi_1(L,a^0)$ este grupul liber cu generatorii $\alpha=[a^0a^1a^2a^0]$, $\beta=[a^0a^1a^3a^0]$, $\gamma=[a^0a^1a^4a^0]$, $\delta=[a^0a^2a^3a^0]$, $\varepsilon=[a^0a^2a^4a^0]$, $\zeta=[a^0a^3a^4a^0]$. Atunci $\pi_1(Y,a^0)$ este grupul cu aceşti generatori, supuşi următoarelor relaţii: $\alpha\beta\zeta$, $\gamma^{-1}\beta\delta^{-1}$, $\varepsilon\zeta^{-1}\beta^{-1}$, $\varepsilon^{-1}\alpha^{-1}\beta$, $\delta^{-1}\varepsilon\gamma^{-1}$, $\alpha^{-1}\gamma\zeta^{-1}$. De aici obţinem $\alpha=\zeta^{-1}\beta^{-1}$, $\beta=\varepsilon\zeta^{-1}$, $\gamma=\delta^{-1}\varepsilon$. Relaţiile rămase devin $\varepsilon^{-1}\delta\varepsilon\zeta^{-1}\delta^{-1}$, $\varepsilon^{-1}\beta\zeta\varepsilon\zeta^{-1}$ şi $\beta\zeta\delta^{-1}\varepsilon\zeta^{-1}$. Din prima obţinem $\zeta=\delta^{-1}\varepsilon^{-1}\delta\varepsilon$, deci $\pi_1(Y,a^0)$ are doi generatori δ şi ε şi două relaţii $\varepsilon^{-2}\delta\varepsilon\delta^{-1}\varepsilon\delta$ şi $\varepsilon^{-1}\delta\varepsilon\delta^{-2}\delta$. A doua poate fi înlocuită cu produsul ei cu inversa primeia şi obţinem $\varepsilon\delta\varepsilon\delta^{-1}\varepsilon^{-1}\delta^{-1}$, iar prima poate fi înlocuită cu această nouă relaţie înmulţită cu inversa relaţiei de care vorbim. Se obţine $\varepsilon\delta^{-1}\varepsilon^{-2}\delta^{-1}\varepsilon^2$. In sfîrşit, fie $\delta=ab^{-1}$, $b=\varepsilon$. Atunci $\pi_1(Y,a^0)$ este grupul cu generatorii a,b şi relaţiile $a^3(ab)^{-2}$ şi $b^5(ab)^{-2}$. Acesta este şi grupul fundamental al lui X deoarece prin adjuncţia unei

3-celule grupul fundamental nu se schimbă(Corolarul 3.3.10)

(b) Aplicăm Exerciţiul 4.3 pentru a arăta că $H_1(X)=0$. Avem $H_1(X)\cong \pi_1(X)/[\pi_1(X),\pi_1(X)]$. Fie $\hat{u}$ clasa unui element $u\in\pi_1(X)$ în grupul factor de mai sus. Avem atunci din relaţia $a^3=(ab)^2$, $a^2=bab$, adică $a^{-2}bab=1$, care implică $a^{-1}(a^{-1}bab^{-1})\,b^2=1$ şi deci $a=(a^{-1}bab^{-1})\,b^2$, adică $\hat{a}=\hat{b}^2$. Pe de altă parte, din relaţia $b^5=a^3$, avem $\hat{a}^2\cdot\hat{b}=\hat{a}^2\cdot\hat{a}$, adică $\hat{a}=\hat{b}$. Comparînd relaţiile subliniate obţinem $\hat{b}^2=\hat{b}$, adică $\hat{b}=1$ şi deci $\hat{a}=1$, care arată că $H_1(X)=0$. Cum avem şi $H_0(X)=Z$, din Exerciţiul 4.16 deducem $H_1(X;Z_2)=$ $=H_1(X)\otimes Z_2\oplus \mathrm{Tor}(H_0(X),Z_2)=0$. Conform cu Corolarul 5.3.18, rezultă că X este 3-varietate orientabilă şi prin urmare, după Propoziţia 5.3.6, $H_3(X)=Z$. In sfîrşit, din dualitatea Poincaré (Teorema 5.3.17) rezultă $H_2(X)\cong H^1(X)$. Dar, după Propoziţia 5.2.17, $H^1(X)=$ $=FH_1(X)\oplus TH_0(X)$ şi deci avem şi $H_2(X)=0$. Rezultă deci că $H_r(X)\cong$ $\cong H_r(S^3)$, $\forall\, r$.

(c) SX este un spaţiu simplu conex, deoarece X este conex. Considerăm apoi $SX=|M|$, pentru $M=K*\{a,b\}$, (K fiind triangularea lui X Dacă $x\in X$, atunci $|\mathrm{Lk}_K(x)|\simeq S^2$ (Propoziţia 3.4.3) şi deci $|\mathrm{Lk}_M(x)|\simeq S^2*\{a,b\}=S^3$. Dacă $x=a$, atunci $|\mathrm{Lk}_M(a)|\simeq X$ şi deci $H_r(|\mathrm{Lk}_M(a)|)\cong H_r(S^3)$. Datorită simetriei şi Teoremei 2.4.5, rezultă că avem pentru orice punct $x\in SX$, $H_r(|\mathrm{Lk}_M(x)|)\cong H_r(S^3)$, care arată că SX este o 4-varietate omologică. Aceasta nu este însă o 4-varietate deoarece $|\mathrm{Lk}_M(a)|$ nu este echivalent omotopic cu S^3 (Propoziţia 3.4.3). In adevăr, în vreme ce S^3 este spaţiu simplu conex, $\pi_1(X)\neq 0$ (aşa cum se arată în Exemplul 3.3.22): fie $\mathcal{S}_5$ grupul substituţii ale mulţimii 1,2,3,4,5 şi fie substituţiile

$x=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&1&3&5\end{pmatrix}$ şi $y=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}$. Fie G subgrupul lui $\mathcal{S}_5$

generat de x şi y. Au loc relaţiile $x^3=(xy)^2=y^5=1$. Este bine definit acum epimorfismul $f: \pi_1(X) \longrightarrow G$, încît $f(a)=x$, $f(b)=y$. Rezultă că $G \cong \pi_1(X)/\mathrm{Ker}\, f$. Cum $G \neq 0$, rezultă că avem şi $\pi_1(X) \neq 0$.

5.10. Fie K o n-varietate omologică orientabilă şi fie (L,M,N) un triplet de subcomplexe ale lui K. Considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & H^r(L,M) & \xrightarrow{j^*} & H^r(L,N) & \xrightarrow{i^*} & H^r(M,N) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{r+1}(L,M) \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow D & & \downarrow D & & \downarrow D & & \downarrow D & \\
\cdots \longrightarrow & H_{n-r}(\bar{M},\bar{L}) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-r}(\bar{N},\bar{L}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-r}(\bar{N},\bar{M}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-r-1}(\bar{M},\bar{L}) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

unde liniile sînt şiruri exacte de triplete şi D este izomorfismul din Teorema 5.3.13. Să se arate că diagrama este comutativă pînă la semn, mai precis, au loc relaţiile :

$i_* D = D j^*$, $j_* D = D i^*$ şi $\partial_* D = (-1)^{n-r} D \delta^*$.

Să se stabilească un rezultat similar pentru omologia şi cohomologia cu coeficienţi în Z_2, dacă poliedrul $|K|$ nu este în mod necesar orientabil.

Rezolvare. Amintim că fiind dat K, o triangulare a unei n-varietăţi omologice, şi σ un r-simplex din K se notează prin

$$e(\sigma) = \{(\hat{\sigma}_m, \hat{\sigma}_{m-1}, \ldots, \hat{\sigma}_0) \in K' / \sigma_m > \sigma_{m-1} > \ldots > \sigma_0 > \sigma\}$$

şi prin $\bar{e}(\sigma)$ = mulţimea simplexelor lui $e(\sigma)$ care nu-l au pe $\hat{\sigma}$ ca vîrf. Se arată (vezi Corolarul 5.3.11), că perechea $(e(\sigma), \bar{e}(\sigma))$ este un $(n-r)$-bloc şi că atunci cînd σ variază în K se obţine o descompunere în blocuri a lui K'. Presupunem că n-simplexele lui K sînt identificate cu elemente ale lui $C_n(K)$. Astfel $z \in C_n(K)$, suma tuturor n-simplexelor lui K, este un ciclu reprentînd un generator al grupului $H_n(K) \cong Z$. În mulţimea vîrfurilor lui K' introducem relaţia de ordine $\hat{\sigma} < \hat{\tau} \iff \dim \sigma > \dim \tau$. Fie

$\phi : C(K) \longrightarrow C(K')$ aplicaţia de lanţuri a divizării

baricentrice(pg.115) şi $h:|K'| \longrightarrow |K|$ o aproximare simplicială a identităţii (Propoziţia 2.5.13).Atunci,pentru un r-simplex σ a lui K,considerat ca element al lui C(K) ,se defineşte $s \in C_r(K) \frown Z$,prin

$$s(\tau) = \begin{cases} 1, \text{dacă } \sigma = \tau \\ 0, \text{dacă } \sigma \neq \tau \end{cases}$$ Vom nota şi $s(\sigma)$.

Considerînd aplicaţia de lanţuri $h_\#: C(K') \longrightarrow C(K)$ şi cea indusă $h_\# \frown 1: C_r(K) \frown Z \longrightarrow C(K') \frown Z$ şi putem considera $(h_\# \frown 1)(s(\sigma)) \in C_r(K') \frown Z$.Mai avem $\phi(z) \in C_n(K')$ şi putem defini $z(\sigma) = (h_\# \frown 1)(s(\sigma)) \cap \phi(z) \in C_{n-r}(K')$.Atunci $z(\sigma)$ este generator pentru $Z_{n-r}(C(e(\sigma), e(\sigma)) \subset C_{n-r}(K)$.

Apoi,$\bar{L}$ este reuniunea blocurilor $e(\sigma)$ cu $\sigma \in \bar{L}$,încît $\bar{L}$ este un bloc subcomplex.Se consideră acum izomorfismul (Teorema 5.3.13) $D: C_r(L,M) \frown Z \longrightarrow \bar{C}_{n-r}(\bar{M},\bar{L})$,definit prin $D(s) = z(\sigma)$, dacă s este homomorfismul ce aplică pe σ în 1 şi celelalte r-simplexe în 0,extins prin liniaritate,adică dacă $s(\sigma_1) = m_1, \ldots, s(\sigma_p) = m_p$,atunci $D(s) = m_1 z(\sigma_1) + \ldots + m_p z(\sigma_p)$ şi unde $\bar{C}$ este complexul de lanţuri obţinut din descompunerea în blocuri $(\bar{C}_p(\bar{M},\bar{L}) = H_p(M^p, M^{p-1}), M^p = \bar{M}_p \cup \bar{L}$,vezi pg.136,Teorema 4.4.20).

Conform Teoremei 5.3.13,avem $dD(s) = (-1)^{n-r} D\delta(s)$,ca în diagrama următoare

$$\begin{array}{ccc} C_r(L,M) \frown Z & \xrightarrow{D} & \bar{C}_{n-r}(\bar{M},\bar{L}) \\ \downarrow \delta & & \downarrow d \\ C_{r+1}(L,M) \frown Z & \xrightarrow{D} & \bar{C}_{n-r-1}(\bar{M},\bar{L}) \end{array}$$

şi acesta induce izomorfismul

$$D: H^r(L,M) \longrightarrow H_{n-r}(\bar{M},\bar{L}).$$

Pentru tripletul (L,M,N) şirul exact de omologie este şirul indus de şirul exact de lanţuri

$$0 \longrightarrow C(M,N) \longrightarrow C(L,N) \longrightarrow C(L,M) \longrightarrow 0.$$

De asemenea pentru tripletul $(\overline{N},\overline{M},\overline{L})$ se poate considera şirul exact de complexe de lanţuri

$$0 \longrightarrow \overline{\overline{C}}(\overline{M},\overline{L}) \xrightarrow{\overline{J}_\sharp} \overline{\overline{C}}(\overline{N},\overline{L}) \xrightarrow{\overline{I}_\sharp} \overline{\overline{C}}(\overline{N},\overline{M}) \longrightarrow 0$$

Arătăm că are loc diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_r(L,M)\frown Z & \xrightarrow{j\frown 1} & C_r(L,N)\frown Z & \xrightarrow{i\frown 1} & C_r(M,N)\frown Z & \longrightarrow & 0 \\
 & & D\downarrow & & D\downarrow & & D\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \overline{C}_{n-r}(\overline{N},\overline{L}) & \xrightarrow{\overline{J}_\sharp} & \overline{C}_{n-r}(\overline{N},\overline{L}) & \xrightarrow{\overline{I}_\sharp} & \overline{C}_{n-r}(\overline{N},\overline{M}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Este suficient să dovedim comutativitatea primei diagrame. Fie $s \in C_r(L,M)\frown Z$. Avem atunci $D(j\frown 1)(s) = D(sj_\sharp) = (h_\sharp \frown 1)(sj_\sharp)\cap\phi(z) = sj_\sharp h_\sharp \cap \phi(z)$. Pe de altă parte, $\overline{J}_\sharp D(s) = \overline{J}_\sharp[(h_\sharp\frown 1)(s)\cap\phi(z)] = sj_\sharp h_\sharp \cap \phi(z)$, deoarece $(h_\sharp\frown 1)(j_\sharp\frown 1) = \overline{J}_\sharp(h_\sharp\frown 1)$.

Datorită comutativităţii diagramei de mai sus şi prin Exerciţiul 4.8, rezultă comutativitatea primelor două pătrate din enunţ. Pentru ultima, avem, $[\gamma] \in H^r(M,N)$, $D\delta^*([\gamma]) = [D\delta(\gamma)] = [(-1)^{n-r}\partial D(\gamma)] = (-1)^{n-r}\partial_* D([\gamma])$.

5.11. Fie X o n-varietate omologică cu bord şi presupunem că $H_1(X;Z_2)=0$. Să se arate că X este orientabilă.

Rezolvare. Pentru varietăţi fără bord afirmaţia corespunzătoare este dată în Corolarul 5.3.18.

După Teoremele 5.4.13 şi 5.4.14, avem :

$H_n(X,\partial X;Z_2) \cong H^0(X;Z_2) \cong Z_2$ şi

$H_{n-1}(X,\partial X;Z_2) \cong H^1(X;Z_2)$ şi prin Propoziţia 5.2.12, $H^1(X;Z_2) \cong H_1(X;Z_2)=0$. Prin Teorema 4.5.15, avem

$H_n(X,\partial X;Z_2) \cong H_n(X,\partial X)\otimes Z_2 \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X,\partial X),Z_2)$.

Apoi $H_{n-1}(X,\partial X;Z_2) = H_{n-1}(X,\partial X)\otimes Z_2 + \mathrm{Tor}(H_{n-2}(X,\partial X),Z_2)$. Cum $H_{n-1}(X,\partial X;Z_2)=0$, rezultă că avem $H_{n-1}(X,\partial X)\otimes Z_2 = 0$ şi $\mathrm{Tor}(H_{n-2}(X,\partial X),Z_2)=0$. Din prima relaţie deducem că $H_{n-1}(X,\partial X)$ nu are sumand direct pe Z_2 şi deci $\mathrm{Tor}(H_{n-1}(X,\partial X),Z_2)=0$.

Din relaţiile subliniate, deducem $Z_2 \cong H_n(X, \partial X) \otimes Z_2$. Dar cum $H_n(X, \partial X)$ este grup abelian liber, (identificîndu-se cu $Z_n(X, \partial X) = Z_n(K,L)$, pentru (K,L) o triangulare a perechii $(X, \partial X)$), rezultă că $H_n(X, \partial X) \cong Z$. Rezultă din aceasta, dacă luăm $z = \sum_{-} \sigma$, unde σ parcurge mulţimea n-simplexelor lui K, atunci, $\forall\, z' \in Z_n(C(K,L))$ se scrie $z' = mz$, ceea ce implică $\partial(z) = 0$, adică putem face identificarea n-simplexelor lui K cu elemente din $C_n(K)$ astfel că $\partial(z) \in C_{n-1}(L)$, ceea ce, conform Definiţiei 5.4.9, înseamnă că X este orientabilă.

5.12. Fie $|K|$ o n-varietate omologică orientabilă/cu bord şi fie (L,M) o pereche de subcomplexe ale lui K, încît $|L| \cap \partial |K| \neq \emptyset$:
Să se arate că $H^r(L,M) \cong H_{n-r}(\overline{M}, \overline{L})$, pentru oricare r.

Rezolvare. Cazul n-varietăţilor omologice orientabile fără bord este cuprins în Teorema 5.3.13.
Considerăm dubla n-varietăţii omologice $|K|$. Atunci, $2|K|$ este o n-varietate omologică închisă orientabilă (Propoziţia 5.4.11)
Fie K_0, K_1 copiile lui K în complexul simplicial 2K şi fie M_1, L_1 copiile lui M şi respectiv L în K_1 (deci în 2K). Considerăm $L' = K_0 \cup L_1$ şi $M' = K_0 \cup M_1$. Atunci (M', L') este o pereche de subcomplexe în 2K. Din Propoziţiile 5.4.11 şi 5.3.13, avem $H^r(\overline{L'}, \overline{M'}) \cong H_{n-r}(M', L')$
După Propoziţia 5.3.9, avem mai departe $H_{n-r}(\overline{M'}, \overline{L'}) \cong$
$\cong H_{n-r}(|2K| - |M'|, |2K| - |L'|) \cong H_{n-r}(|K_0 \cup \partial K \times I \cup K_1| - |K_0 \cup M_1|,$
$|K_0 \cup \partial K \times I \cup K_1| - |K_0 \cup L_1|) \cong H_{n-r}(|K| - |M|, |K| - |L|) \cong H_{n-r}(\overline{M}, \overline{L})$.
Prin urmare $H^r(L', M') \cong H_{n-r}(\overline{M}, \overline{L})$. Pe de altă parte, avem $K_0 \cup L_1 = L_1 \cup (K_0 \cup M_1)$ şi $L_1 \cap (K_0 \cup M_1) = M_1$. Aplicăm Teorema excizie pentru coomologie şi obţinem $H^r(L', M') = H^r(L_1 \cup (K_0 \cup M_1), K_0 \cup M_1) \cong$
$\cong H^r(L_1, M_1) \cong H^r(L, M)$.

5.13. Fie $|K|$ o n-varietate omologică închisă şi fie (L,M) o pereche de subcomplexe astfel încît $|L|$ este o n-varietate omologică cu bord şi $\partial |L| = |L \cap M|$, $|K| = |L \cup M|$. Să se arate că $|M|$ este de asemenea

o n-varietate omologică cu bord şi $\partial|M| = \partial|L|$.

Rezolvare. Un exemplu satisfăcînd condiţiile din enunţ este cel din Fig. 33, unde $|K| = S^2$, $|L|$ este 2-simplexul haşurat şi N reuniunea celorlalte trei feţe ale tetredrului.

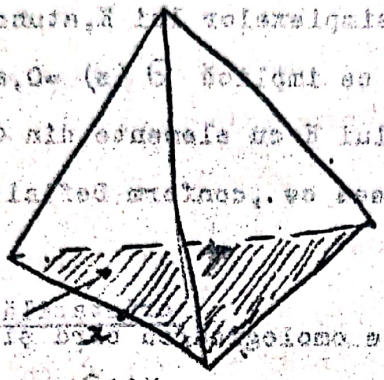


Fig. 33

Procedăm prin inducţie după n. Pentru n=1, $|K|$ este un cerc şi verificarea este imediată. Presupunem concluzia adevărată pentru (n-1)-varietăţi omologice închise. Fie $\dim|K| = n$ şi fie $x \in |M|$. Dacă $x \in |M| - |L|$, atunci există o vecinătate deschisă a lui x în $|M|$ care este deschisă de asemenea în K şi obţinem prin Teorema 2.4.5 că avem $|Lk_M(x)| \simeq |Lk_K(x)|$. Prin urmare $\tilde{H}_r(|Lk_M(x)|) \cong \tilde{H}_r(|Lk_K(x)|) \cong \tilde{H}_r(S^{n-1})$.

Fie acum $x \in |M| \cap |L| = \partial|L|$. După Lema 5.4.7, dacă notăm $Lk_K(x) = N$, atunci $\tilde{H}_{r-1}(|Lk_N(y)|) \cong \tilde{H}_r(|Lk_K(z)|) = H_r(S^{n-1}) \cong H_{r-1}(S^{n-2})$, $\forall\, y \in |N|$. Prin urmare $|Lk_K(x)|$ este o (n-1)-varietate omologică închisă şi, deoarece $H_{n-1}(|Lk_K(x)|) \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \cong Z$ este şi orientabilă. În mod analog, $|Lk_L(x)|$ este o (n-1)-varietate omologică cu bord, avînd bordul $\partial|Lk_L(x)| = |Lk_{M\cap L}(x)| = |Lk_M(x)| \cap |Lk_L(x)|$. Ţinînd seama şi de relaţia $|Lk_M(x)| \cup |Lk_L(x)| = |Lk_K(x)|$, în baza ipotezei inductive, pentru $(Lk_L(x), Lk_M(x))$ în $|Lk_K(x)|$, deducem că $|Lk_M(x)|$ este o (n-1)-varietate omologică cu bordul $|Lk_{M\cap L}(x)|$. Este şi orientabilă, deoarece $|Lk_K(x)|$ este orientabilă. Or, dacă $|P|$ este o n-varietate omologică orientabilă, cu bord nevid, atunci $H_n(P) = 0$. În adevăr, avem $H_n(P, \partial P) \cong Z$ şi

$z=\sum\pm\sigma$, cu σ parcurgînd toate n-simplexele lui P, este generator pentru $Z_n(P,\partial P)$. Avem $\partial z\in C_{n-1}(\partial P)$ şi cum $\partial P\neq\phi$, rezultă $\partial z\neq 0$. Se deduce, deoarece $\forall z'\in Z_n(P)$, $z'=mz$, că $Z_n(P)=0$. Aşadar, cu cele de mai sus, avem $H_{n-1}(|Lk_M(x)|)=0$. Să considerăm acum şirul Mayer-Vietoris (Teorema 4.4.6) pentru tripletul $(Lk_K(x); Lk_L(x), Lk_M(x))$:

$$\ldots\to\tilde{H}_r(Lk_{M\cap L}(x))\longrightarrow\tilde{H}_r(Lk_M(x))\oplus\tilde{H}_r(Lk_L(x))\longrightarrow\tilde{H}_r(Lk_K(x))\xrightarrow{\partial_*}$$
$$\longrightarrow\tilde{H}_{r-1}(Lk_{M\cap L}(x))\longrightarrow\ldots$$

Deoarece $x\in\partial|L|$, avem $\tilde{H}_r(Lk_L(x))=0$ şi deoarece $|M|\cap|L|=\partial|L|$ este o $(n-2)$-varietate omologică închisă, $\tilde{H}_r(Lk_{M\cap L}(x))\cong\tilde{H}_r(S^{n-2})$. In sfîrşit, $\tilde{H}_r(Lk_K(x))\cong\tilde{H}_r(S^{n-1})$.

Obţinem astfel şirul exact

$$\ldots\to\tilde{H}_r(S^{n-2})\longrightarrow\tilde{H}_r(Lk_M(x))\longrightarrow\tilde{H}_r(S^{n-1})\longrightarrow\tilde{H}_{r-1}(S^{n-2})\to\ldots$$

Dacă $r\neq n-1, n-2$, deducem imediat că $\tilde{H}_r(Lk_M(x))=0$. Pentru $r=n-1$ am văzut mai sus că avem $\tilde{H}_{n-1}(Lk_M(x))=0$. In sfîrşit, pentru $r=n-2$ obţinem şirul exact

$$0\longrightarrow\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})\xrightarrow{\partial_*}\tilde{H}_{n-2}(S^{n-2})\longrightarrow\tilde{H}_{n-2}(Lk_M(x))\longrightarrow 0$$

Din demonstraţia Teoremei 4.4.6 se poate arăta relativ uşor că ∂_* este izomorfism şi prin urmare $\tilde{H}_{n-2}(Lk_M(x))=0$. Rezumînd, avem: $\tilde{H}_r(Lk_M(x))\cong\tilde{H}_r(S^{n-1})$, dacă $x\in|M|-|L|$ şi $\tilde{H}_r(Lk_M(x))=0$, dacă $x\in\partial|L|$.

5.14. Fie (K,L) o triangulare a unei n-varietăţi omologice orientabile cu bord, unde $|L|=\partial|K|$. Dacă $i:|\bar{L}|\longrightarrow|K|$ este aplicaţia de incluziune, să se arate că $i_*:H_r(\bar{L})\longrightarrow H_r(K)$ este izomorfism, pentru toţi r.

Rezolvare. Considerăm perechea $(\bar{L},\phi)$, pentru care avem $|\bar{L}|\cap\partial|K|=\phi$. Utilizînd Exerciţiul 5.12 şi Propoziţia 5.2.17, avem un izomorfism $\alpha:H^{n-r}(K,L)\longrightarrow H_r(\bar{L})$. Apoi, $i_*\alpha$ este izomorfism, deoarece coincide cu izomorfismul $\beta:H^{n-r}(K,L)\cong H_r(K)$ din Teorema de dualitate a lui Lefschetz (5.4.13, pg.192).

5.15. Date două n-varietăţi omologice închise $|K|$ şi $|L|$, suma conexă $|K|\#|L|$ este definită în felul următor (să se compare cu Exerciţiul 3.14). Alegem n-simplexele σ şi τ în K şi respectiv L şi în $|K-\sigma|\cup|L-\tau|$ identificăm punctele lui $|\dot\sigma|$ cu punctele corespunzătoare ale lui $|\dot\tau|$, printr-un homeomorfism simplicial al lui $|\dot\sigma|$ pe $|\dot\tau|$. Această definiţie nu depinde de simplexele σ şi τ pînă la clase de homeomorfisme ale lui $|K|$ şi $|L|$.

(a). Să se arate că spaţiul $|K|\#|L|$ este o n-varietate omologică închisă;

(b). Cînd $|K|$ şi $|L|$ sînt orientabile, atunci

$$H_n(|K|\#|L|) \cong Z,$$

$$H_r(|K|\#|L|) \cong H_r(K) \oplus H_r(L) \quad (0 < r < n)$$

(c). Să se arate că n-varietatea omologică $|K|\#|L|$ nu poate fi orientabilă decît dacă sînt orientabile $|K|$ şi $|L|$.

Rezolvare. (a). Deoarece $|K|$ este o n-varietate omologică închisă şi $|\sigma|$ este n-varietate omologică cu bord şi în plus $|K| = |\sigma \cup K-\sigma|$, $\partial|\sigma| = |\sigma \cap (K-\sigma)|$, rezultă din Exerciţiul 5.13 că avem $|K-\sigma|$ şi $|L-\tau|$ două n-varietăţi omologice cu bord şi anume $\partial|K-\sigma| = |\dot\sigma|$, $\partial|L-\tau| = |\dot\tau|$.

Este evident că o triangulare pentru $|K|\#|L|$ este cea care cuprinde toate simplexele lui K şi ale lui L, mai puţin pe σ şi τ, feţele acestora fiind considerate o singură dată (prin identificare). Fie $K\#L$ această triangulare. Fie acum $x \in |K|\#|L|$. Dacă $x \in |\dot\sigma| = |\dot\tau|$ (în $|K|\#|L|$), atunci este clar că $|Lk_{K\#L}(x)| \simeq |Lk_K(x)|$, dacă $x \in |K|-|\sigma|$, respectiv $|Lk_{K\#L}(x)| \simeq |Lk_L(x)|$ dacă $x \in |L|-|\tau|$ şi deci, oricum $H_r(Lk_{K\#L}(x)) \cong H_r(S^{n-1})$, $\forall r$.

Dacă $x \in |\dot\sigma| = |\dot\tau|$, atunci $|Lk_{K\#L}(x)| = |Lk_{K-\sigma}(x)| \cup_f |Lk_{L-\tau}(x)|$ unde f este restricţia homeomorfismului după care se identifică $|\dot\sigma|$ cu $|\dot\tau|$. Avem $|Lk_{K-\sigma}(x)| \cap |Lk_{K-\tau}(x)| = |Lk_{\dot\sigma}(x)| \simeq S^{n-2}$.

Considerăm acum şirul exact de omologie Mayer-Vietoris, pentru tripletul $(Lk_{K\#L}(x); Lk_{K-\sigma}(x), Lk_{K-\tau}(x))$:

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_r(Lk_{\dot{\sigma}}(x)) \longrightarrow \tilde{H}_r(Lk_{K-\sigma}(x)) \oplus \tilde{H}_r(Lk_{K-\tau}(x)) \longrightarrow \tilde{H}_r(Lk_{K\#L}(x))$$

$$\longrightarrow \tilde{H}_{r-1}(Lk_{\dot{\sigma}}(x)) \longrightarrow \cdots.$$

Ţinem acum seama de faptul că $\tilde{H}_r(Lk_{K-\sigma}(x)) = 0$ şi $\tilde{H}_r(Lk_{K-\tau}(x)) = 0$, $|K-\sigma|$ şi $|L-\tau|$ fiind n-varietăţi omologice cu bord şi x aparţinînd bordurilor acestora. Deducem deci că $\tilde{H}_r(Lk_{K\#L}(x)) \cong \tilde{H}_{r-1}(Lk_{\dot{\sigma}}(x)) \cong \tilde{H}_{r-1}(S^{n-2}) \cong \tilde{H}_r(S^{n-1})$ şi prin urmare, $K\#L$ este o n-varietate omologică.

Independenţa acesteia de alegerea n-simplexelor σ şi τ şi a homeomorfismului între $|\dot{\sigma}|$ şi $|\dot{\tau}|$, rezultă analog cazului n=2, din Exerciţiul 3.14 (vezi şi Completările la Cap. 3).

(b). $|K|$ şi $|L|$ fiind orientabile, atunci considerînd homeomorfismul f, ca o aplicaţie simplicială, încît $f(\dot{\sigma}) = -\dot{\tau}$, rezultă imediat că fiecare (n-1)-simplex θ din $K\#L$, faţă pentru n-simplexele θ_1 şi θ_2, apare în $\partial(\theta_1)$ şi $\partial(\theta_2)$ cu semne contrarii. Deci $K \# L$ este orienabilă şi, după Teorema 5.3.6, avem $H_n(|K\#L|) \cong \mathbb{Z}$. Putem considera apoi şirul Mayer-Vietoris pentru tripletul $(K\#L; K-\sigma, L-\tau)$. Avem $(K-\sigma) \cap (L-\tau) = |\dot{\sigma}| = |\dot{\tau}|$ şi deci este exact şirul:

$$\cdots, \tilde{H}_r(\dot{\sigma}) \longrightarrow \tilde{H}_r(K-\sigma) \oplus \tilde{H}_r(L-\tau) \longrightarrow \tilde{H}_r(K\#L) \longrightarrow \tilde{H}_{r-1}(\dot{\sigma}) \to \cdots$$

Dar $\dot{\sigma}$ este homeomorf cu S^{n-1} şi deci, pentru $r \neq n-1, n$ şi $r > 0$, avem $\tilde{H}_r(K\#L) \cong \tilde{H}_r(K-\sigma) \oplus \tilde{H}_r(L-\tau)$. Dar, după Teorema 5.3.13, $\tilde{H}_r(K-\sigma) \cong H^{n-r}(K, \dot{\sigma}) \cong \tilde{H}^{n-r}(K)$ şi analog $\tilde{H}_r(L-\tau) \cong \tilde{H}^{n-r}(L)$. Prin urmare: $H_r(K\#L) \cong H^{n-r}(K) \oplus H^{n-r}(L)$. Aplicînd Teorema de dualitate Poincaré, $H^{n-r}(K) \cong H_r(K)$ şi $H^{n-r}(L) \cong H_r(L)$. Prin urmare, pentru $0 < r < n-1$, avem $H_r(K\#L) \cong H_r(K) \oplus H_r(L)$.

In sfîrşit, dacă $r=n-1$, avem $H_n(K-\sigma)=0$, deoarece $|K-\sigma|$ este o n-varietate omologică orientabilă cu bord, şi $H_n(K-\tau)=0$ şi deducem şirul exact:

$$0 \longrightarrow H_n(K\#L) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\dot{\sigma}) \cong Z \xrightarrow{\eta_*} H_{n-1}(K-\sigma) \oplus H_{n-1}(L-\tau) \xrightarrow{J_*}$$

$$\xrightarrow{J_*} H_{n-1}(K\#L) \longrightarrow 0$$

Dar ∂_* aplică generatorul lui $H_n(K\#L)$ în generatorul lui $H_{n-1}(\dot{\sigma})$ care arată că ∂_* este izomorfism. Prin urmare η_* este homomorfismul nul și deci J_* este izomorfism. Așa dar $H_{n-1}(|K|\#|L|) \cong$

$\cong H_{n-1}(K-\sigma) \oplus H_{n-1}(L-\tau) \cong H^1(K) \oplus H^1(L-\gamma) \cong H_{n-1}(K) \oplus H_{n-1}(L)$.

(c) Dacă presupunem că n-varietatea omologică $|K|\#|L|$ este orientabilă, rezultă evident că este orientabilă și n-varietatea omologică cu bord $K-\sigma$. Avem, prin urmare $H_n(K-\sigma) = 0$. Din șirul Mayer-Vietoris pentru tripletul $(K; K-\sigma, \sigma)$ avem

$$\ldots \quad H_n(\dot{\sigma}) \xrightarrow{\eta_*} H_n(K-\sigma) \oplus H_n(\sigma) \xrightarrow{J_*} H_n(K) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\dot{\sigma}) \xrightarrow{\eta_*}$$

$$H_{n-1}(K-\sigma) \oplus H_{n-1}(\sigma) \xrightarrow{J_*} H_{n-1}(K) \longrightarrow 0$$

adică $0 \longrightarrow H_n(K) \xrightarrow{\partial_*} Z \xrightarrow{\eta_*} H_{n-1}(K-\sigma) \xrightarrow{J_*} H_{n-1}(K) \longrightarrow 0$

Dar J_* este izomorfism (deoarece $\dim \sigma = n$) și deci $H_n(K) \cong Z$. Prin urmare, $|K|$ este n-varietate omologică orientabilă. În mod analog rezultă orientabilitatea pentru $|L|$.

5.16. Fie $|K|$ o n-varietate ($n \geq 2$) omologică orientabilă închisă. Fie σ și τ două n-simplexe disjuncte din K și fie L complexul simplicial obținut din $K-(\sigma \cup \tau)$ și $\dot{\sigma} \times I$ identificînd $\dot{\sigma} \times 0$ cu $\dot{\sigma}$ și $\dot{\sigma} \times 1$ cu $\dot{\tau}$ (utilizînd un homeomorfism simplicial). Să se arate că acesta poate fi dat încît $|L|$ este o n-varietate omologică orientabilă și că avem

$$H_r(L) \cong H_r(K), \quad r \neq n-1, 1$$

$$\left.\begin{aligned} H_{n-1}(L) &\cong H_{n-1}(K) \oplus Z \\ H_1(L) &\cong H_1(K) \oplus Z \end{aligned}\right\} \quad n \geq 3$$

$$H_1(L) \cong H_1(K) \oplus Z \oplus Z \quad (n=2)$$

(Construcția lui L din K este un caz special al unei construcții cunoscute sub denumirea de "chirurgie"; în general aceasta constă în înlocuirea unui spațiu homeomorf cu $S^r \times E^{n-r}$ prin

$E^{r+1} \times S^{n-r-1}$, care are aceeaşi frontieră $S^r \times S^{n-r-1}$. In exemplul de sus avem cazul r=0).

Rezolvare .In Fig. 34 avem un tor cu un "mîner" obţinut în acest fel.

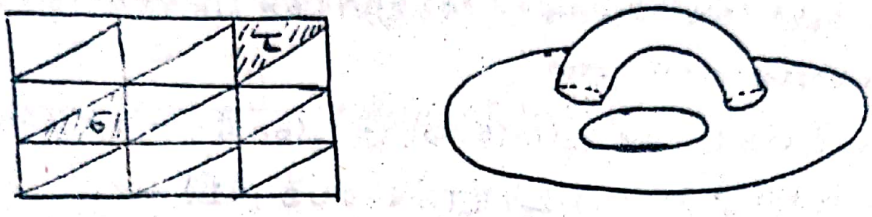


Fig. 34

Faptul că $|L|$ este o n-varietate omologică ,rezultă în mod analog Exerciţiului 5.15, deoarece dacă $x \in |(\dot{\sigma} \times 0)| \cup |(\dot{\sigma} \times 1)|$, se obţine în mod evident $H_r(Lk_L(x)) \cong H_r(S^{n-1})$, iar dacă $x \in |\dot{\sigma} \times 0| = |\dot{\sigma}|$, atunci $|Lk_L(x)| = |Lk_{K-\sigma}(x)| \cup |Lk_{\dot{\sigma} \times I}(x)|$ şi $|Lk_{K-\sigma}(x)| \cap |Lk_{\dot{\sigma} \times I}(x)| = |Lk_{\dot{\sigma}}(x)|$, întrucît σ şi τ sînt presupuse disjuncte. Rezultă ca în Exerciţiul 5.15 , $H_r(Lk_L(x)) \cong H_r(S^{n-1})$ şi acelaşi lucru dacă $x \in |\dot{\sigma} \times 1| = |\dot{\tau}|$.

Presupunem K orientabilă. Apoi, $|\dot{\sigma} \times I|$ este o n-varietate omologică orientabilă cu bordul $|\dot{\sigma} \times 0| \cup |\dot{\sigma} \times 1|$. Conform cu Corolarul 5.4.12, $|\dot{\sigma} \times 0|$ şi $|\dot{\sigma} \times 1|$ sînt (n-1) -varietăţi orientabile închise. Definim atunci homeomorfismele simpliciale $f: \dot{\sigma} \times 0 \longrightarrow \dot{\sigma}$ şi $g: \dot{\sigma} \times 1 \longrightarrow \dot{\tau}$ astfel încît considerate ca aplicaţii $C_{n-1}(\dot{\sigma} \times 0) \longrightarrow C_{n-1}(K)$ şi respectiv $C_{n-1}(\dot{\sigma} \times 1) \longrightarrow C_{n-1}(K)$ să fie $f(\dot{\sigma} \times 0) = -\dot{\sigma}$ şi respectiv $g(\dot{\sigma} \times 1) = +\dot{\tau}$ .Rezultă atunci uşor (ţinînd seama că orietarea pentru $\dot{\sigma} \times 0$ şi $\dot{\sigma} \times 1$ este compatibilă cu orietatrea pentru $\dot{\sigma} \times I$) că este satisfăcută condiţia de orientabilitate pentru $|L|$.

Deoarece K este orientabilă, după Teorema 5.3.13, avem

$$H_r(K-(\sigma \cup \tau)) \cong H^{n-r}(K, \{\hat{\sigma}, \hat{\tau}\}) = \begin{cases} H^{n-r}(K) & , n > r+1 \\ 0 & , n = r \\ H^1(K) \oplus Z, & n = r+1 \end{cases}$$

Aplicînd dualitatea Poincaré obţinem:

$$H_r(K-(\sigma\cup\tau)) \cong \begin{cases} H_r(K) , & r \neq n-1 \\ H_{n-1}(K) \oplus Z, & r=n-1 \end{cases}$$

Putem de asemenea considera şirul Mayer-Vietoris pentru tripletul $(L; K-(\sigma\cup\tau), \dot{\sigma}\times I)$. Avem $(K-(\sigma\cup\tau))\cap(\dot{\sigma}\times I) = \dot{\sigma}\times 0 \cup \dot{\sigma}\times 1$ şi deci se obţine şirul exact

$$\ldots \to H_r(\dot{\sigma}\times 0 \cup \dot{\sigma}\times 1) \to H_r(K-(\sigma\cup\tau)) \oplus H_r(\dot{\sigma}\times I) \to H_r(L) \to$$
$$\to H_{r-1}(\dot{\sigma}\times 0 \cup \dot{\sigma}\times 1) \to \ldots$$

Dacă $r \neq n-1, 1$, avem $H_r(\dot{\sigma}\times 0 \cup \dot{\sigma}\times 1) = H_r(\dot{\sigma}\times I) = H_r(S^{n-1}\times I) = H_r(S^{n-1}) = 0$ şi $H_{r-1}(\dot{\sigma}\times 0 \cup \dot{\sigma}\times 1) = H_{r-1}(S^{n-1}) = 0$.

Utilizînd şirul exact de mai sus şi precedentele, deducem

$H_r(L) \cong H_r(K-(\sigma\cup\tau)) \cong H_r(K)$, pentru $r \neq n-1, 1$.

Dacă $r=1$ şi dacă $n \geq r+2 = 3$, avem şirul exact

$$0 \to H_1(K-(\sigma\cup\tau)) \to H_1(L) \to \tilde{H}_0(\dot{\sigma}\times 0 \cup \dot{\sigma}\times 1) \to$$
$$\to \tilde{H}_0(K-(\sigma\cup\tau)) \oplus \tilde{H}_0(\dot{\sigma}\times I) = 0, \text{ adică}$$

$0 \to H_1(K-(\sigma\cup\tau)) \to H_1(L) \to Z \to 0$. Prin urmare

$H_1(L) \cong H_1(K-(\sigma\cup\tau)) \oplus Z \cong H_1(K) \oplus Z$.

Pentru $r=n-1$ şi $n \geq 3$, avem şirul exact

$$0 \to H_n(L) \to H_{n-1}(\dot{\sigma}\times 0 \cup \dot{\sigma}\times 1) \to H_{n-1}(K-(\sigma\cup\tau)) \oplus$$
$$\oplus H_{n-1}(\dot{\sigma}\times I) \to H_{n-1}(L) \to H_{n-2}(\dot{\sigma}\times 0 \cup \dot{\sigma}\times 1)$$

adică

$$0 \to Z \to Z\oplus Z \to H_{n-1}(K) \oplus Z \oplus Z \to H_{n-1}(L) \to 0.$$

Apoi, L fiind orientabilă, $H_{n-1}(L) \cong H^1(L)$ şi prin Propoziţia 5.2.17, avem $H^1(L) \cong PH_1(L) \oplus TH_0(L) \cong PH_1(L)$ şi prin urmare $H_{n-1}(L) \cong PH_1(L)$. In mod analog $H_{n-1}(K) \cong PH_1(K)$.

Grupurile $H_{n-1}(L)$ și $H_{n-1}(K)$ fiind libere, rezultă din șirul exact precedent $H_{n-1}(L) \cong H_{n-1}(K) \oplus Z$.

Pentru n=2 și r=1, avem $H_1(K-(\sigma \cup \tau)) \cong H_1(K) \oplus Z$

Șirul Mayer-Vietoris pentru tripletul $(L; K-(\sigma \cup \tau), \dot{\sigma} \times I)$ conduce la

$$0 \longrightarrow H_2(L) \longrightarrow H_1(\dot{\sigma} \times 0 \cup \dot{\sigma} \times 1) \longrightarrow H_1(K-(\sigma \cup \tau)) \oplus$$

$$\oplus H_1(\dot{\sigma} \times I) \longrightarrow H_1(L) \longrightarrow \tilde{H}_0(\dot{\sigma} \times 0 \cup \dot{\sigma} \times 1)$$

$$\tilde{H}_0(\sigma \times I) \oplus \tilde{H}_0(K-(\sigma \cup \tau))$$

adică

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow Z \oplus Z \longrightarrow Z \oplus H_1(K) \oplus Z \longrightarrow H_1(L) \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

în care grupurile $H_1(L)$ și $H_1(K)$ sînt abeliene libere (avem de exemplu, $H_1(L) \cong H^1(L) \cong FH_1(L) \oplus TH_0(L) = FH_1(L)$).

Se deduce șirul scurt exact

$$0 \longrightarrow H_1(K) \oplus Z \longrightarrow H_1(L) \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

care fiind scindat implică $H_1(L) \cong H_1(K) \oplus Z \oplus Z$.

5.17. Să se arate că varietățile omologice $|K|$ și $|L|$ din Exercițiul 5.16 sînt cobordante. Să se deducă faptul că orice 2-varietate triangulabilă orientabilă M_g este bordul unei 3-varietăți. Să se folosească o metodă similară pentru a dovedi că N_h este bordul unei 3-varietăți dacă h este par și că N_1 și N_h sînt cobordante dacă h este impar.

Rezolvare. Se știe că (vezi Corolarul 5.4.12 și Teorema 5.4.14) că bordul unei n-varietăți omologice cu bord este o reuniune de (n-1)-varietăți omologice închise. Cobordismul este studiul problemei reciproce: dată o varietate omologică închisă, sau o reuniune disjunctă de asemenea varietăți, să se vadă dacă aceasta este bordul unei varietăți omologice cu bord. În particular, două (n-1)-varietăți omologice închise X și Y se zic cobordante dacă există o n-varietate omologică Z încît ∂Z este reuniunea disjunctă a

lui X cu Y. Dacă X este o n-varietate omologică cu bord, atunci $\chi(\partial X)$ este par (Propoziţia 5.4.15). Deci, dacă $\chi(X \cup Y)$ nu este număr par, atunci X şi Y nu pot fi cobordante. Fie acum $|K|$ şi $|L|$ ca în 5.16. Vom construi o (n+1)- varietate omologică cu bord, a cărui bord să fie reuniunea disjunctă a lui $|K|$ şi $|L|$. Notăm cu $\frac{1}{2}\sigma$ simplexul obţinut din σ prin omotetia cu centrul în baricentrul lui σ şi de raport $\frac{1}{2}$. Considerăm cilindrul $\left[K - \mathrm{Int}(\frac{1}{2}\sigma) \cup \mathrm{Int}(\frac{1}{2}\tau)\right] \times I$. La acesta vom face adjuncţia spaţiului $E(n+1,1) = \left\{(t_1, \ldots, t_{n+1}) \in R^{n+1} / \sum_{i=2}^{n} t_i^2 \leq 1 , \right.$ $\left. |t_1^2 + t_2^2 - t_3^2 - \ldots - t_{n+1}^2| \leq 1/16 \right\}$. Este clar că $E(n+1,1)$ este o (n+1) -varietate cu bord. Pentru cazul n=1, adică $E(2,1)$, vezi Fig.35

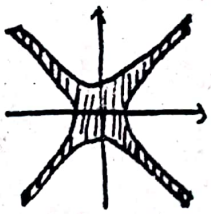


Fig.35

Adjuncţia se face cu ajutorul următorului homeomorfism, uşor de stabilit;

$$\varphi : E(n+1,1) \cap \left[R^{n+1} - (R^1 \times \mathrm{Int}(\tfrac{1}{2} E^n))\right] \longrightarrow \left[(\sigma \cup \tau) - (\mathrm{Int}(\tfrac{1}{2}\sigma) \cup \mathrm{Int}(\tfrac{1}{2}\tau)\right] \times I$$

Este uşor de văzut că spaţiul astfel obţinut este o (n+1)-varietate omologică având bordul reuniunea disjunctă dintre $|K|$ şi $|L|$.

Folosind aceeaşi metodă, se poate arăta că: dacă poliedrul $|M|$ este cobordant cu $|M|$, atunci $|L|$, tot cel de mai sus şi din Exerciţiul 5.16, este de asemenea cobordant cu $|M|$ ($|M|$ poate fi eventual vidă).

Torul M_1 se obţine din S^2 ca în Exerciţiul 5.16 (cazul n=2). Dar $S^2 = \partial E^3$ este cobordantă cu mulţimea vidă, deci M_1 este cobordant cu mulţimea vidă.

Procedăm acum prin inducţie după g. Deoarece M_g se obţine din M_{g-1} prin prin "chirurgie" (avem de fapt $H_1(M_g) \cong 2gZ \cong H_1(M_{g-1}) \oplus Z \oplus Z \cong$ $\cong H_1(L_g)$ şi prin urmare avem că $|L_g|$ este obţinut din M_{g-1} prin

"chirurgie" din M_{g-1}, dar M_g şi $|L_g|$ sînt 2-varietăţi închise şi deci în baza teoremei de clasificare a suprafeţelor, M_g şi $|L_g|$ sînt homeomorfe), rezultă că M_g este cobordant cu mulţimea vidă, deci M_g este bordul unei 3-varietăţi.

Fie acum $|K| = N_1^0 \vee N_1^1$, unde N_1^0 şi N_1^1 sînt două copii ale lui N_1 (planul proiectiv). Alegem două 2-simplexe σ, τ, $\sigma \in N_1^0$, $\tau \in N_1^1$, considerăm $N_1^0 - \sigma$, $N_1^1 - \tau$ şi $\dot{\sigma} \times I$ şi identificăm $\dot{\sigma} \times 0$ cu $\dot{\sigma}$ şi $\dot{\sigma} \times 1$ cu $\dot{\tau}$, obţinînd un complex L. Ca în Exerciţiul 5.16 se arată că $|L|$ este o 2-varietate omologică neorientabilă (deci este o 2-varietate). Considerăm şirul exact de coomologie Mayer-Vietoris pentru $(L; (N_1^0 - \sigma) \cup \dot{\sigma} \times I, (N_1^1 - \tau) \cup \dot{\sigma} \times I)$. Avem:

$$0 = \tilde{H}^0(\dot{\sigma} \times I) \longrightarrow H^1(L) \qquad H^1((N_1^0 - \sigma) \cup \dot{\sigma} \times I) \oplus H^1((N_1^1 - \tau) \cup \dot{\sigma} \times I)$$

$$\longrightarrow H^1(\dot{\sigma} \times I) \longrightarrow H^2(L) \longrightarrow 0 .$$

Avem pe de altă parte $H^1((N_1^0 - \sigma) \cup (\dot{\sigma} \times I)) \otimes Q \cong H^1(N_1^0 - \sigma) \otimes Q =$ $= (H^1(N_1^0) \otimes Q) \oplus Q \cong Q$, $H^1((N_1^1 - \tau) \cup (\dot{\sigma} \times I)) \otimes Q \cong Q$ şi $H^1(\dot{\sigma} \times I) \otimes Q \cong Q$. Rezultă din şirul exact de mai sus, că avem $\dim H^1(L) \otimes Q = 2 - 1 = 1$, care arată că avem $|L|$ homeomorf cu N_2.

Apoi rezultă uşor că $|L| = \partial[(N_1^0 - \sigma) \times I]$, unde $(N_1^0 - \sigma) \times I$ este evident o 3-varietate omologică cu bord. Rezultă deci că N_2 este bordul unei 3-varietăţi.

Avem $N_1 \vee N_1 = \partial (N_1 \times I)$, deci N_1 este cobordant cu N_1.

Vom încheia demonstraţia părţii a 2-a a exerciţiului, arătînd că N_{h+2} se obţine din N_h prin operaţia de "chirurgie" dată de Exerciţiul 5.16 ($h \geq 1$). Fie $\tilde{N}_{h+2}$ complexul obţinut prin această operaţie. Din Exerciţiul 5.16, avem $H_1(N_{h+2}) \cong H_1(N_h) \oplus Z \oplus Z \cong$ $\cong (h-1)Z \oplus Z_2 \oplus Z \oplus Z = (h+1)Z \oplus Z_2 = [(h+2) - 1]Z \oplus Z_2$ şi cum N_{h+2} este o 2-varietate omologică, este şi o 2-varietate (Exerciţiul 5.8). Avem prin urmare că $\tilde{N}_{h+2}$ este homeomorfă cu N_{h+2}.

Atunci, conform celor de mai sus, N_h fiind cobordantă cu N_1 avem că şi N_{h+2} este cobordantă cu N_1.

C

1) Exercițiul 5.3 arată că functorul contravariant $\otimes G$ nu este exact. Dar se poate arăta că nici functorul covariant $G \otimes$ nu este exact la dreapta. In adevăr, dacă se consideră șirul exact $0 \longrightarrow Z \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{\pi} Z_2 \longrightarrow 0$, pentru $f(n)=2n$ și π epimorfismul canonic, rezultă șirul exact $0 \longrightarrow Z_2 \otimes Z=0 \longrightarrow Z_2 \otimes Z=0 \xrightarrow{1 \otimes \pi} Z_2 \otimes Z_2=Z_2$, dar $1 \otimes \pi$ nu este, evident, un epimorfism.
Pentru mai multe proprietăți de exactitate ale functorilor se poate consulta, de exemplu, I. Bucur, Algebră omologică, Ed. did. ped., Buc. 1965.

2) Mai multe rezultate privind teoreme pentru coeficienți universali (în legătură cu Exercițiile 5.5 și 5.6) se află în E.H. Spanier, Algebraic Topology, Mir, 1971, Cap. 5.

3) Afirmația reciprocă celeia din Exercițiul 5.11 nu este adevărată. De exemplu, cilindrul $S^1 \times I$ are tipul de omotopie a lui S^1, deci $H_1(S^1 \times I; Z_2) \cong H_1(S^1; Z_2) \cong Z_2$, cu toate că $S^1 \times I$ este orientabilă.

4) Altă soluție pentru Exercițiul 5.14.
Fie $\widetilde{K}$, $\widetilde{L}$ suplimentele pentru $K=K_0$ și respectiv $L=L_0$ în $2K$. Avem $\widetilde{L}=\widetilde{K} \cup \bar{L}$, $\widetilde{K} \cap \bar{L}=\phi$ și deducem izomorfismele
$H^{n-r}(K,L) \xrightarrow{D} H_r(\widetilde{L},\widetilde{K}) \longrightarrow H_r(\bar{L}), (i_1)_* H_r(K_0) \longrightarrow H_r(\widetilde{K}_1)$.
Fie $\alpha=(i_1)_* i_* D: H^{n-r}(K,L) \longrightarrow H_r(\widetilde{K}_1)$, care este de fapt $\alpha([s])=[(h_\# \otimes 1)(s) \cap \phi(z)]$, $s \in C_{n-r}(K,L) \otimes Z$; $(h_\# \otimes 1)(s) \cap \phi(z) \in C_r(K') \subset C_r(\widetilde{K}_1)$. Considerăm compunerea de izomorfisme

$$H^{n-r}(K,L) \xrightarrow{(i_2^*)^{-1}} H^{n-r}(K_0 \cup L \times I, L \times \bar{I}) \xrightarrow{j_1^*}$$

$$H^{n-r}(K_0 \cup L \times I, L \times 1) \xrightarrow{(i_3^*)^{-1}} H^{n-r}(2K, K_1) \xrightarrow{D_1} H_r(\widetilde{K}_1),$$

pe care o notăm cu β. Apoi, dacă $[s] \in H^{n-r}(K,L)$, $s \in C_{n-r}(K,L) \otimes Z$, atunci $\beta[s]=(D_1(i_3^*)^{-1} j_1 (i_3^*)^{-1}([s])=D_1([s'])$, unde $s': C_{n-r}(2K,K_1) \longrightarrow Z$ este definită prin

$$s'(\sigma)=\begin{cases} s(\sigma), & \text{dacă } \sigma \in K_0-L_0 \\ 0, & \text{dacă } \sigma \in \bar{K}_0-L_0 \end{cases}$$

Atunci s' este un cociclu în $C_{n-r}(2K,K_1) \otimes Z$. Rezultă deci că $\beta[s]=D_1[s']=[(h_\# \otimes 1)(s') \otimes \phi(z)]$, unde $(h_\# \otimes 1)(s') \otimes \phi(z) \in C_r(\widetilde{K}_1)$ și se avem $(h_\# \otimes 1)(s') \otimes \phi(z)=(h_\# \otimes 1)(s) \otimes \phi(z)$ ca elemente ale lui $C_r(\widetilde{K}_1)$. Avem deci $\beta[s]=\alpha[s]$. Rezultă că α este un izomorfism. Dar $\alpha=(i_1)_* i_* D$, cu $(i_1)_*$, e, D izomorfisme. Rezultă că și i_* este izomorfism.

5). In Exercițiul 5.12 se poate schimba rolul omologiei și coomologiei, adică avem și izomorfismele $H_r(L,M) \cong H^{n-r}(\bar{M},\bar{L})$ (cm și utilizat acest lucru în Exercițiul 5.14).
Utilizînd Propoziția 5.2.1 (vezi și demonstrația acesteia), avem $H^{n-r}(\bar{M},\bar{L}) \cong FH_{n-r}(\bar{M},\bar{L}) \oplus T\,H_{n-r-1}(\bar{M},\bar{L}) \cong FH^r(L,M) \oplus TH^{r+1}(L,M)$
$\cong FH_r(L,M) \oplus TH_r(L,M) = H_r(L,M)$.

6). Pentru probleme de cobordism și chirurgie se pot consulta spre exemplu: C.Teleman, Geometrie diferențială locală și globală. Editura Tehnică 1974, § 2.8; D.Burghelea, Th.Hangan, ș.a., Introducere în topologie diferențială, Ed.științifică, Buc.1973, Cap.III și V.A.Rohlin, D.B.Fuks, Nacialnîi kurs topologii, Nauka, 1977, Cap.3. Pentru categorii de cobordism și probleme de cobordisme speciale se poate consulta monografia lui R.E.Stong, Notes on Cobordism Theory, Princeton Univ.Press and the Univ.of Tokyo Univ.Press, 1968, (Editura Mir, 1973).
Pentru o varietate X se definește așa numitul număr Stiefel-Whitney (vezi de exemplu D.Husemoller, Fibre Bundles, Mc Graw-Hill Inc.1966, p.260). Se poate arăta atunci dacă două varietăți X și Y sînt cobordante, atunci acestea au aceleași numere Stiefel-Whintney (D.Husemoller, op.cit.p.261) (O altă condiție necesară, aplicabilă în cazuri particulare, este dată în Propoziția 5.4.15, p.194).

7). In legătură cu Exercițiul 5.15: conform Exercițiului 3.14, $M_1 \# N_1$ este homeomorf cu N_3. Avem că N_1 și N_3 sînt suprafețe neorientabile (iar M_1 este o suprafață orientabilă).

8). Pentru un grup G (sau, mai general, pentru un R-modul G), se definesc grupurile (R-modulele) de coomologie Alexander (sau Alexander-Spanier $\bar{H}^q(X,A;G)$ ale unei perechi topologice cu coeficienți în G. Se poate consulta E.H.Spanier, op.cit.cap.6.
Are loc următoarea teoremă de dualitate (Dualitatea Alexander):
Dacă A este o submulțime compactă a lui R^n, atunci $\tilde{H}_q(R^n-A;G) \cong \bar{H}^{n-q-1}(A;G)$.
O pereche topologică (X,A) se numește o n-varietate relativă, dacă X este spațiu Hausdorff, A închisă în X și X-A o n-varietate. Dacă X-A este orientabilă are loc izomorfismul de dualitate Lefschetz: $H_q(X-A;G) \cong \bar{H}^{n-q}(X,A;G)$ (op.cit.p.382).

Capitolul 6. TEORIA GENERALA A OMOTOPIEI.

.1. Să se arate că rezultatele Teoremei 6.2.4 nu sînt adevărate fără unele restricţii asupra spaţiilor ce intervin, cu ajutorul următoru lui exemplu. Pentru orice întreg $n \geq 1$, fie I_n o copie a unui interval I. Fie X reuniunea disjunctă a spaţiilor I_n şi $Y = \bigvee I_n$, iar $p: X \longrightarrow Y$ aplicaţia de identificare. Atunci, dacă Q este mulţimea numerelor raţionale, topologizată ca submulţime a dreptei reale $p \times 1: X \times Q \longrightarrow Y \times Q$ nu este aplicaţie de identificare.

Rezolvare. Enunţul Teoremei 6.2.4:

(a) Dacă $p: X \longrightarrow Y$ este o aplicaţie de identificare şi Z este un spaţiu Hausdorff local compact, atunci $p \times 1: X \times Z \longrightarrow Y \times Z$ este o aplicaţie de identificare.

(b) Dacă A este un subspaţiu compact al unui spaţiu X şi $p: X \longrightarrow X/A$ este aplicaţia de identificare, atunci, pentru orice spaţiu Z, $p \times 1: X \times Z \longrightarrow (X/A) \times Z$ este o aplicaţie de identificare.

Din Exerciţiul 1.12 rezultă că subspaţiul Q al lui R nu este local compact.

Fie acum pentru orice $n \geq 1$, numerele raţionale din intervalul $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, numerotate $q_1, q_2, \ldots$ şi fie

$$U_{n,r} = \left(q_r - \frac{1}{n \cdot 2^r}, q_r + \frac{1}{n \cdot 2^r}\right) \cap Q \text{ şi}$$

$$V_n = I_n \times \left\{\left[\left(-\infty, -\frac{1}{n}\right) \cup \left(\frac{1}{n}, +\infty\right)\right] \cap Q\right\} \cup \bigcup_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^r}, 1\right] \times U_{n,r}$$

şi fie $V = (p \times 1)\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right)$. Vom arăta că $(p \times 1)^{-1}(V)$ este deschisă, dar că V nu este deschisă. Mai întîi, $(p \times 1)^{-1}(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ şi

este suficient să arătăm că V_n sînt deschise. Avem $X \times Q$ reuniunea disjunctă a spaţiilor $I_n \times Q$ şi $V_n \subset I_n \times Q$, fiind o reuniune de mulţimi deschise. Prin urmare $(p \times 1)^{-1}(V)$ este deschisă. Fie apoi $(y_0, 0) \in Y \times Q$, unde y_0 este punctul bază în care se identifică toate punctele bază ale lui I_n, deci $y_0 = p(1)$, $1 \in I_n$.

Avem $(y_0, 0) = (p \times 1)(1, 0) \in V$. Dacă presupunem că V este mulţime deschisă, atunci $(y_0, 0)$ trebuie să fie punct interior al acesteia. V trebuie deci să conţină o vecinătate în $Y \times Q$ a lui $(y_0, 0)$ de forma $U \times U'$, cu U o vecinătate a lui y_0 în Y şi U' o vecinătate a lui 0 în Q.

Putem presupune că $U' = (-\varepsilon, \varepsilon) \cap Q$. Luăm n natural, încît $\varepsilon > \frac{1}{n}$. Avem $p^{-1}(U) \cap I_n$ o vecinătate a lui 1 în I_n. Există deci $[\delta, 1] \subset [0,1]$ încît $[\delta, 1] \subset p^{-1}(U) \cap I_n$. Atunci $[\delta, 1] \times U' \subset V_n$ şi deducem incluziunea

$$[\delta, 1] \times \left(\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right] \cap Q \right) \subset \bigcup_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^r} \right], 1] \times U_{n,r}$$

Considerăm $r_0 \in \mathbb{N}$, încît $\delta < 1 - \frac{1}{2^{r_0}}$. Avem atunci, din incluziunea de mai sus

$$\delta \times \left(\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right] \cap Q \right) \subset \bigcup_{r=1}^{r_0} \left(1 - \frac{1}{2^r}, 1 \right) \times U_{n,r}$$

, de unde deducem că

$$\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right] \cap Q \subset \bigcup_{r=1}^{r_0} U_{n,r} =$$

$$= \bigcup_{r=1}^{r_0} \left(q_r - \frac{1}{n \cdot 2^r}, q_r + \frac{1}{n \cdot 2^r} \right) \cap Q .$$

Cum Q este densă în R, deducem incluziunea

$$\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right] \subset \bigcup_{r=1}^{r_0} \left[q_r - \frac{1}{n \cdot 2^r}, q_r + \frac{1}{n \cdot 2^r} \right] .$$

Această incluziune nu este însă posibilă, deoarece, considerînd lungimile segmentelor care intervin am obţine

$$\frac{2}{n} \leq \sum_{r=1}^{r_0} \frac{2}{n \cdot 2^r}, \text{ adică}$$

$$1 \leq \sum_{r=1}^{r_0} \frac{1}{2^r} = 1 - \frac{1}{2^{r_0}} .$$

Rezultă deci că V nu este deschisă.

6.2. Fie $X=S^1$ şi $A=S^1-p$, unde p este un punct al lui S^1, altul decît punctul bază. Să se arate că A este contractibil, dar că $X \not\simeq X/A$

Rezolvare.

A este homeomorf cu un segment şi deci este în mod evident spaţiu contractibil.

Fie apoi $\hat{1}$ punctul bază al lui S^1. Avem $X/A=\{\hat{1},\hat{p}\}$. Din topologia cît a lui X/A, rezultă că $\{\hat{1}\}$ este deschisă, iar $\{\hat{p}\}$ este închisă. Deducem imediat că X/A este spaţiu liniar conex.

In adevăr, aplicaţia $\theta : I \longrightarrow X/A$ definită prin

$$\theta(t) = \begin{cases} \hat{1}, & t \in [0,1) \\ \hat{p}, & t=1 \end{cases}$$ este un drum în X/A de la $\hat{1}$ la $\hat{p}$.

Să presupunem acum că $f:X \longrightarrow X/A$, $g:X/A \longrightarrow X$ sînt astfel că $gf \simeq Id$ şi $fg \simeq Id$. Deoarece X/A este liniar conex, rezultă $g(X/A)$ liniar conex şi deci g este aplicaţie constantă. Rezultă deci că $gf=const.$, adică $1_X \simeq const.$, ceea ce implică S^1 contractibil, care nu este adevărat.

6.3. Date spaţiile X şi Y, "uniunea" (the join) $X*Y$ este definită ca fiind spaţiul obţinut din $X \times Y \times I$ identificînd $(x,y,0)$ cu $(x,y_0,0)$ şi $(x,y,1)$ cu $(x_0,y,1)$ pentru orice $x \in X$, $y \in Y$.

(a) Să se arate că dacă X şi Y sînt poliedre, această definiţie coincide, pînă la homeomorfisme, cu cea din 2.3.

(b) Se defineşte "uniunea redusă" (the reduced join) $X \dot{*} Y$ ca fiind spaţiul obţinut din $X*Y$ identificînd la un punct subspaţiul $(x_0 \times Y \times I) \cup (X \times y_0 \times I)$.

Să se arate că $X \dot{*} Y$ şi $s(X \wedge Y)$ sînt homeomorfe şi să se deducă de aici că $X*Y \simeq s(X \wedge Y)$, dacă X şi Y sînt poliedre.

Rezolvare.

(a) Fie K_1 şi K_2 două complexe simpliciale. Considerăm spaţiile $|K_1*K_2|$ şi $|K_1|*|K_2|$. Dacă $z\in|K_1*K_2|$, atunci $z=\lambda_o a^{i_o}+\ldots+\lambda_p a^{i_p}+\mu_o b^{j_o}+\ldots+\mu_q b^{j_q}$, pentru $(a^{i_o},\ldots,a^{i_p})$ un simplex în K_1 şi $(b^{j_o},\ldots,b^{j_q})$ un simplex în K_2. Putem scrie atunci $z=(1-t)z_1+tz_2$, cu $z_1\in(a^{i_o},\ldots,a^{i_p})$ şi $z_2\in(b^{j_o},\ldots,b^{j_q})$. În adevăr, putem găsi $z_1=\alpha_o a^{i_o}+\ldots+\alpha_p a^{i_p}$, $z_2=\beta_o b^{j_o}+\ldots+\beta_q b^{j_q}$, pentru

$$\alpha_h=\frac{\lambda_h}{\sum\lambda_h} \quad \text{şi} \quad \beta_h=\frac{\mu_h}{\sum\mu_h}.$$

Definim atunci aplicaţia $f:|K_1*K_2|\longrightarrow|K_1|*|K_2|$, prin

$$f(z)=\begin{cases}\widehat{(z_1,z_2,t)}\,; & t\in(0,1)\\ \widehat{(x_o,z_2,1)}\,; & t=1\\ \widehat{(z_1,y_o,0)}\,, & t=0\end{cases}$$

In fond, f face comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccc}|K_1*K_2| & \xrightarrow{\ f\ } & |K_1|*|K_2|\\ & {\scriptstyle f_1}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle p} & \\ & |K_1|\times|K_2|\times I & \end{array}$$

unde $f_1(z_1,z_2,t)=(1-t)z_1+tz_2$, iar p este aplicaţia de identificare. Avem că f_1 este o aplicaţie de identificare (vezi § 2.3, Ch. 2, pg. 40). Deci, dacă D este deschisă în $|K_1|*|K_2|$, avem $f_1^{-1}(f^{-1}(D))=p^{-1}(D)$ deschisă şi deci f este continuă. Se poate defini apoi aplicaţia $g:|K_1|*|K_2|\longrightarrow|K_1*K_2|$, cu $g(\widehat{x,y,t})=(1-t)x+ty$. Se verifică imediat că g este bine definită. Cum gof este continuă, rezultă că g este continuă.

In sfirşit,

$$gf((1-t)z_1+tz_2)=\begin{cases}g(\widehat{z_1,z_2,t})\,, & t\in(0,1)\\ g(\widehat{x_o,z_2,1})\,, & t=1\\ g(\widehat{z_1,y_o,0})\,, & t=0\end{cases}=(1-t)z_1+tz_2, \text{ adică}$$

$gf=id$. Deducem de asemenea că $fg=id$ şi deci f este un homeomorfism.

(b). Avem $X*Y = X*Y/(x_0 \times Y \times I \cup X \times y_0 \times I)$, adică $(x,y,0) \equiv (x,y_0,0) \equiv (x,y_0,t)$ =pct şi $(x,y,1) \equiv (x_0,y,1) \equiv (x_0,y,t)$ =pct.

Considerăm aplicaţia

$\varphi : X*Y \longrightarrow (X \wedge Y) \times S^1$ definită prin

$\varphi(\widehat{x,y,t}) = ((x \wedge y), \theta(t))$, cu $\theta : I \longrightarrow S^1$ aplicaţia canonică. Avem atunci $\varphi(\widehat{x_0,y,t}) = ((x_0 \wedge y), \theta(t)) \in (X \wedge Y) \vee S^1$ şi $\varphi(\widehat{x,y_0,t}) = ((x \wedge y_0), \theta(t)) \in (X \wedge Y) \vee S^1$, adică φ induce aplicaţia continuă

$\overline{\varphi} : X*Y \longrightarrow s(X \wedge Y)$.

Putem defini de asemenea $\overline{\psi} : (X \wedge Y) \wedge S^1 = s(X \wedge Y) \longrightarrow X*Y$ prin $\overline{\psi}((x \wedge y) \wedge t)) = (\widehat{\widehat{x,y,t}})$. In adevăr, relaţia $(x \wedge y) \wedge \theta(0) = (x \wedge y) \wedge \theta(1)$ implică $(\widehat{\widehat{x,y,0}}) = (\widehat{\widehat{x,y,1}})$ se identifică cu $(x,y,0) \equiv (x,y_0,0) \equiv (x_0,y_0,0)$.

Avem $\overline{\psi}\,\overline{\varphi}(\widehat{\widehat{x,y,t}}) = \overline{\varphi}((x \wedge y) \wedge \theta(t)) = (\widehat{x,y,t})$ şi de asemenea se deduce $\overline{\varphi}\,\overline{\psi} = id$. Prin urmare $X*Y$ şi $s(X \wedge Y)$ sînt homeomorfe.

Să presupunem acum că X şi Y sînt poliedre, $X = |K_1|$, $Y = |K_2|$.

Fie $p : |K_1 * K_2| \longrightarrow |K_1| * |K_2|$ proiecţia

$$p((1-t)z_1 + tz_2) = \begin{cases} (\widehat{\widehat{z_1,z_2,t}}), t \neq 0,1, z_1 \neq x_0, z_2 \neq y_0 \\ \text{pct. bază, în celelate cazuri.} \end{cases}$$

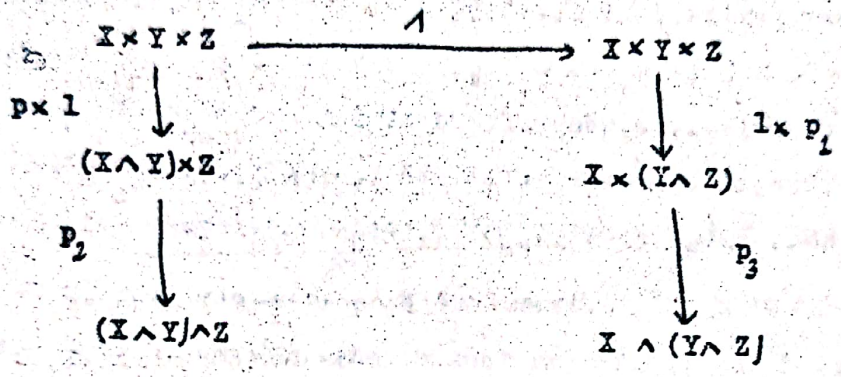
Aplicaţia p este o aplicaţie de identificare. Considerînd de asemenea aplicaţia de identificare

$\rho : |K_1| \times |K_2| \times I \longrightarrow |K_1| * |K_2|$, avem că perechea $(|K_1 * K_2|, \rho(x_0 \times |K_2| \times I \cup |K_1| \times y_0 \times I) = A)$ are proprietatea de extensie absolută a omotopiei. Deoarece $(x_0,y,0)$ se identifică cu $(x_0,y_0,0)$ şi $(x,y_0,1)$ cu $(x_0,y_0,1)$, se deduce că A este spaţiu contractibil. Conform Corolarului 6.2.7, aplicaţia p este o echivalenţă omotopică. Deci $|K_1 * K_2| \simeq |K_1| * |K_2|$.

Cum $|K_1 * K_2|$ este homeomorf cu $|K_1| * |K_2|$ şi $|K_1| * |K_2|$ este homeomorf cu $s(|K_1| \wedge |K_2|)$, rezultă că avem $|K_1| * |K_2| \simeq s(|K_1| \wedge |K_2|)$.

6.4. Să se arate că dacă X şi Z sînt spaţii Hausdorff local compacte, atunci $(X \wedge Y) \wedge Z$ şi $X \wedge (Y \wedge Z)$ sînt homeomorfe.

Rezolvare. Considerăm diagrama



unde p este proiecţia $X \times Y \longrightarrow X \wedge Y$.

Din Teorema 6.2.4, rezultă că aplicaţiile $p \times 1$ şi $1 \times p_1$ sînt aplicaţii de identificare. Apoi, aplicaţiile $p_2(p \times 1)$ şi $p_3(1 \times p_1)$ identifică cu cîte un punct acele puncte ale lui $X \times Y \times Z$ care au cel puţin o componentă egală cu un punct bază. Rezultă că sînt definite aplicaţiile $f: (X \wedge Y) \wedge Z \longrightarrow X \wedge (Y \wedge Z)$ şi $g: X \wedge (Y \wedge Z) \longrightarrow (X \wedge Y) \wedge Z$, încît $f(p(p \times 1))(x,y,z) = p_3(1 \times p_1)(x,y,z)$ şi respectiv $g(p(1 \times p_1))(x,y,z) = p(p \times 1)(x,y,z)$. Continuitatea acestora rezultă din faptul că $p \times 1$ şi $1 \times p_1$ sînt aplicaţii de identificare. In sfîrşit, este clar că f şi g sînt inverse una alteia.

6.5. Se definesc funcţiile $\theta: Y^X \times Z \longrightarrow (Y \times Z)^X$, $\phi: Y^{X \times Z} \times Z \longrightarrow Y^X$ prin formulele:

$[\theta(\lambda, z)](x) = (\lambda(x), z)$, $(x \in X, z \in Z, \lambda: X \longrightarrow Y)$,

$[\phi(\mu, z)](x) = \mu(x, z)$, $(x \in X, z \in Z, \mu: X \times Z \longrightarrow Y)$.

(a) Să se arate că θ este totdeauna continuă.

(b) Dacă Z este spaţiu Hausdorff, local compact, atunci ϕ este continuă.

Rezolvare. (a). Fie $W_{K,U} = \{f : X \longrightarrow Y \times Z / f(K) \subset U\}$, pentru K un compact din X şi U deschisă în $Y \times Z$. Avem de arătat că $\theta^{-1}(W_{K,U})$ este deschisă în $Y^X \times Z$. Avem:

$$\theta^{-1}(W_{K,U}) = \{(\lambda, z) / \theta(\lambda, z)(K) \subset U\} =$$
$$= \{(\lambda, z) / (\lambda(K), z) \subset U\}.$$

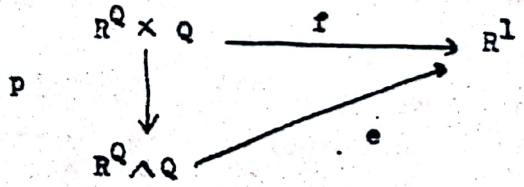
Fie deci $(\lambda, z) \in \theta^{-1}(W_{K,U})$. Avem atunci $(\lambda(K), z) \in U, \forall k \in K$. Prin urmare, pentru $\forall k \in K$, există $U_k \subset Y$ şi $U'_k \subset Z$, cu $z \in U'_k$, astfel încît $U_k \times U'_k \subset U$ şi $\lambda(k) \in U_k$. Cînd k parcurge K, mulţimile $U_k \cap \lambda(K)$ constituie o acoperire deschisă a lui $\lambda(K)$, care este compact. Extragem o acoperire finită $U_{k_1} \cap \lambda(K), \ldots, U_{k_p} \cap \lambda(K)$. Fie $V = U_{k_1} \cup \ldots \cup U_{k_p}$ şi $V' = U'_{k_1} \cap \ldots \cap U'_{k_p}$. Considerăm mulţimea deschisă $W_{K,V} \times V' \subset Y^X \times Z$. Avem $\lambda \in W_{K,V}$ deoarece, pentru $\forall k \in K$, avem $\lambda(k) \in U_{k_i}$, pentru un indice $i = 1, \ldots, p$. Apoi, $z \in U'_{k_i}$, care implică $z \in V'$. Avem prin urmare $(\lambda, z) \in W_{K,V} \times V'$. Să arătăm că această vecinătate a lui (λ, z) este inclusă în $\theta^{-1}(W_{K,U})$. Dacă $(\lambda', z') \in W_{K,V} \times V'$, rezultă $\lambda'(K) \subset V$ şi $z' \in V'$, aceasta înseamnă că avem $(\lambda'(K), z') \subset U_{k_i} \times U'_{k_i} \subset U$, care arată că $(\lambda', z') \in \theta^{-1}(W_{K,U})$.

(b). Fie $W_{K,U} = \{f \in Y^X / f(K) \subset U\}$, unde K este compactă în X şi U este deschisă în Y. Să arătăm că $\phi^{-1}(W_{K,U})$ este deschisă în $Y^{X \times Z} \times Z$. Avem: $\phi^{-1}(W_{K,U}) = \{(\mu, z) \in Y^{X \times Z} \times Z / \phi(\mu, z) \in W_{K,U}\} =$
$= \{(\mu, z) \in Y^{X \times Z} \times Z / \mu(K, z) \subset U\} = \{(\mu, z) \in Y^{X \times Z} \times Z /$
$\mu(k, z) \in U, \forall k \in K\}$. Fie $(\mu, z) \in \phi^{-1}(W_{K,U})$. Avem deci $\mu(k, z) \in U$, $\forall k \in K$. Apoi $\mu : X \times Z \longrightarrow Y$ este continuă şi deci $\mu^{-1}(U)$ este deschisă în $X \times Z$. Deci pentru fiecare $k \in K$ şi z fixat în Z există mulţimile deschise $U_k \subset X, U'_k \subset Z$, încît $k \in U_k, z \in U'_k$ şi $U_k \times U'_k \subset \mu^{-1}(U)$. Căutăm o vecinătate a lui $(\mu, z) \in Y^{X \times Z} \times Z$ de forma $W_{K',U'} \times V'$, cu K' compact în $X \times Z$, U' deschisă în Y, V' deschisă în Z şi astfel ca $W_{K',U'} \times V' \subset \phi^{-1}(W_{K,U})$.

Luăm $U'=U$ şi $K'=K\times K_1$, unde K_1 va fi un compact din Z. Pentru U'_k există U''_k deschisă, încît $z\in U''_k\subset\overline{U''_k}\subset U'_k$ şi $\overline{U''_k}$ compactă. Cînd k variază în K, $\{U''^{K}_k\}$ constituie o acoperire deschisă pentru K. Extragem o acoperire finită $U_{k_1}\cap K,\dots,U_{k_p}\cap K$ şi luăm $V'=U''_{k_1}\cap\dots\cap U''_{k_p}$ şi $K_1=\overline{U''_{k_1}}\cap\dots\cap\overline{U''_{k_p}}$. Atunci $W_{K',U'}\times V'$ este vecinătate pentru (μ,z). In adevăr, avem $z\in V'$ şi pentru $(k,k_1)\in K'=K\times K_1$, avem $k\in U_{k_1}$, $k_1\in\overline{U''_{k_1}}\subset U'_{k_1}$, care implică $\mu(k,k_1)\in U=U'$. Fie apoi $(\mu',z')\in W_{K',U'}\times V'$. Aceasta înseamnă că $z'\in V'$ şi $\mu'(k,k_1)\in V'$, $\forall(k,k_1)\in K\times K_1$. Avem $V'\subset K_1$ şi deci $\mu'(k,z')\in U'=U$, care arată că $\phi(\mu',z')\in W_{K,U}$. Cu alte cuvinte $W_{K',U'}\times V'\subset\phi^{-1}(W_{K,U})$.

6.6. Să se arate că aplicaţia de evaluare $e:Y^X\wedge X\longrightarrow Y$ nu este totdeauna continuă. Să se ia pentru aceasta $X=Q$ şi $Y=R^1$, ambele cu punctul bază 0.

Rezolvare. Considerăm diagrama comutativă



unde $f(\lambda,x)=\lambda(x)$. Este suficient să arătăm că f nu este aplicaţie continuă.

Să observăm mai întîi că nici o submulţime compactă a lui Q nu conţine toate punctele raţionale ale unui interval. In adevăr, dacă am presupune contrariul. Atunci pentru orice $x\in Q$, considerăm $[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$ şi fie K compactul lui Q încît $[x-\varepsilon,x+\varepsilon]\cap Q\subset K$. Ar rezulta că spaţiul Q este local compact, în contradicţie cu Ex. 1.12.

Fie acum $(-1,1)=D\subset R^1$. Atunci $r^{-1}(D)=\{(\lambda,x)\,/\,\lambda(x)\in(-1,1)\}$.

Fie $\lambda : Q \longrightarrow R$ inclusiunea. Atunci $(\lambda, 0) \in R^Q \times Q$, $\lambda(0) = 0$ şi $(-1,1)$ este vecinătate pentru 0, iar $(\lambda, 0) \in f^{-1}((-1,1))$. Fie $W_{K,U} \times V$ o vecinătate deschisă a lui $(\lambda, 0)$, pentru K compact în Q, U deschisă în R şi V deschisă în Q, încît $0 \in V$, $\lambda(K) = K \subset U$. Putem de asemenea presupune că $V \subset (-1,1) \cap Q$. Fie $y_0 \in V$, $y_0 \in K$ (un asemenea punct există în baza celor de mai sus). Putem defini atunci $\mu : Q \longrightarrow R$ prin $\mu(K) = u_0 \in U$ şi $\mu(y_0) = 2$. Acest lucru este posibil în baza faptului că Q este spaţiu normal (fiind metric). Avem atunci $(\mu, y_0) \in W_{K,U} \times V$, deoarece $\mu(K) = u_0 \in U$ şi $y_0 \in V$, dar $(\mu, y_0) \in f^{-1}((-1,1))$ deoarece $\mu(y_0) = 2 \in (-1,1)$. Deci nici o vecinătate a lui $(\lambda, 0)$ nu este inclusă în $f^{-1}((-1,1))$, ceeace arată că f nu este continuă, de unde conchidem că e nu este continuă.

6.7. Să se deducă din Exerciţiul 6.6 că aplicaţia de asociere $\alpha : Z^{X \wedge Y} \longrightarrow (Z^Y)^X$ nu este totdeauna surjectivă.

Rezolvare. Amintim că α este definită prin $[\alpha(\lambda)(x)](y) = \lambda(x \wedge y)$.

Luăm $X = R^Q$, $Y = Q$, $Z = R$ şi fie $Id \in (R^Q)^{R^Q}$. Să presupunem că este surjectivă, deci că există $\mu : R^Q \wedge Q \longrightarrow R$ continuă, încît $\alpha(\mu) = Id$. Prin urmare $\forall f \in R^Q$, $\forall q \in Q$, avem $[\alpha(\mu)(f)](q) = f(q)$. Apoi, putem considera aplicaţia de evaluare $e : R^Q \wedge Q \longrightarrow R$ şi avem $[\alpha(e)(f)](q) = e(f \wedge q) = f(q)$, adică $\alpha(e) = \alpha(\mu)$. Cum α este injectivă (Teorema 6.2.38 (a)), rezultă $e = \mu$ şi deci e ar fi continuă, contrar celor arătate în Exerciţiul 6.6.

6.8. Date spaţiile X şi Y, încît $X \simeq Y$, să se arate că Y este un AHI dacă şi numai dacă X este un AHI.

In mod analog, să se arate că Y este AH'I dacă şi numai dacă X are această proprietate.

Rezolvare. Fie X un AHI. Există deci $m : X \times X \longrightarrow X$, încît

$mi_1 \simeq mi_2 \simeq 1_X$, unde $i_1, i_2 : X \longrightarrow X \times X$, cu $i_1(x) = (x, x_0)$, $i_2(x) = (x_0, x)$ şi $m(m \times 1) \simeq m(1 \times m)$. In plus există $u : X \longrightarrow X$ în aşa fel ca $m(u \times 1)\Delta_X \simeq m(1 \times u)\Delta_X \simeq e_X$, $e_X : X \longrightarrow x_0$ şi $\Delta_X : X \longrightarrow X \times X$, aplicaţia diagonală $\Delta_X(x) = (x, x)$.

Fie acum $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ aplicaţii cu puncte bază, astfel încît $gf \simeq 1_X$ şi $fg \simeq 1_Y$, prin omotopii păstrînd punctele bază.

Definim acum $m' : Y \times Y \longrightarrow Y$, ca fiind compunerea $m' = fm(g \times g)$. Fie $i_1', i_2' : Y \longrightarrow Y \times Y$, aplicaţiile $i_1'(y) = (y, y_0)$, $i_2'(y) = (y_0, y)$. Avem atunci $m'i_1' = fm(g \times g)i_1'$. Dar $(g \times g)i_1'(y) = (g \times g)(y, y_0) = (g(y), x_0) = i_1 g(y)$, adică $(g \times g)i_1' = i_1 g$. Prin urmare: $m'i_1' = fmi_1 g \simeq f\, 1_X g \simeq fg \simeq 1_Y$. In mod analog rezultă că avem $m'i_2' \simeq 1_Y$.

Apoi $m'(m' \times 1) = fm(g \times g)[fm(g \times g) \times 1] = fm[gfm(g \times g) \times g] \simeq$
$\simeq fm[m(g \times g) \times g] = f[m(m \times 1)((g \times g) \times g)] \simeq f[m(1 \times m)((g \times g) \times g)] \simeq$
$\simeq f[m(1 \times m)(g \times (g \times g)] = fm[g \times m(g \times g)] = fm[g \times gfm(g \times g)] =$
$= fm(g \times g)[1 \times fm(g \times g)] = m'(1 \times m')$.

Definim $u' : Y \longrightarrow Y$ prin $u' = fug$. Atunci: $m'(u' \times 1)\Delta_Y =$
$= fm(g \times g)(fug \times 1)\Delta_Y = fm(gfu \times 1)\Delta_X g \simeq fm(u \times 1)\Delta_X g$
$\simeq fe_X g \times e_Y$. Analog rezultă că $m'(1 \times u')\Delta_Y \simeq e_Y$.

Rezultă deci că Y este un AHI.

Să presupunem acum că X este un AH'I. Aceasta înseamnă că există $\mu : X \longrightarrow X \vee X$ încît $p_1\mu \simeq p_2\mu \simeq 1_X$, unde p_1, p_2 sînt restricţiile la $X \vee X$ a proiecţiilor $p_1, p_2 : X \times X \longrightarrow X$ definite prin $p_1(x_1, x_2) = x_1$, $p_2(x_1, x_2) = x_2$. In plus $(\mu \vee 1)\mu \simeq (1 \vee \mu)\mu$ şi există $v : X \longrightarrow X$, astfel încît $\nabla_X(v \vee 1) \simeq \nabla_X(1 \vee v) \simeq e_X$ unde $\nabla_X : X \vee X \longrightarrow X$ este aplicaţia de "împăturire" $\nabla_X(x, x_0) = x$ şi $\nabla_X(x_0, x) = x$.

Dacă considerăm f şi g ca mai sus, atunci definim

$\mu' : Y \longrightarrow Y \vee Y$, prin $\mu' = (f \vee f)\mu g$

și $v':Y \longrightarrow Y$,prin $v'=fvg$.Se verifică fără dificultate că în raport cu acestea Y este un AH'I.

6.9.Fie $\mu:S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^1$ o aplicație în raport cu care S^1 este un AH'I.Să se arate că există numai două clase de omotopie de asemenea aplicații și că dacă $\pi_1(Y)_1$ și $\pi_1(Y)_2$ notează structurile de grup corespunzătoare în $[S^1,Y]$,atunci $\pi_1(Y)_1 \cong \pi_1(Y)_2$.

Rezolvare.

Considerăm grupul fundamental $\pi_1(S^1 \vee S^1,(s_o,s_o))$.Prin Teorema 3.3.18,avem $\pi_1(S^1 \vee S^1,(s_o,s_o)) \cong \pi_1(S^1,s_o) * \pi_1(S^1,s_o) \cong Z * Z = G_p\{a,b\}$ -grupul liber cu generatorii $a=[\alpha]$, $b=[\beta]$,unde α , β $:(I,\dot{I}) \longrightarrow (S^1 \vee S^1,(s_o,s_o))$ sînt definite prin $\alpha(t)=(e^{2\pi it},s_o)$ și $\beta(t)=(s_o,e^{2\pi it})$.Definim atunci $\mu_1:S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^1$ prin $\mu_1(e^{2\pi it})=\begin{cases}\alpha(2t) & ,0 \le t \le 1/2 \\ \beta(2t-1) & ,1/2 \le t \le 1\end{cases}$

Avem atunci ,pentru $p_1,p_2:S^1 \vee S^1 \longrightarrow S^1$,

$$p_1\mu_1(e^{2\pi it}) = \begin{cases} e^{4\pi it} & ,0 \le t \le 1/2 \\ s_o=1, & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Putem construi atunci omotopia

$H:S^1 \times I \longrightarrow S^1$,prin $H((e^{2\pi it},t')) =$

$$= \begin{cases} e^{2\pi it(2-t')} & ,0 \le t \le \frac{1}{2-t'} \\ s_o=1, & \frac{1}{2-t'} \le t \le 1 \end{cases}$$

Se verifică imediat că H este o omotopie cu punct bază între $p_1\mu_1$ și 1_{S^1}.In mod analog rezultă că $p_2\mu_1 \simeq 1_{S^1}$.

Avem apoi:

$$(\mu_1 \vee 1)\mu_1(e^{2\pi it}) = \begin{cases} (e^{8\pi it},1,1) & ,0 \le t \le 1/4 \\ (1,e^{4\pi i(2t-1)},1) & ,1/4 \le t \le 1/2 \\ (1,1,e^{2\pi i(2t-1)}) & ,1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

$$(1\vee\mu_1)\vee\mu_1\,(e^{2\pi it}) = \begin{cases} (e^{4\pi it},1,1) & ,0\le t\le 1/2 \\ (1,e^{4\pi i(2t-1)},1) & ,1/2\le t\le 3/4 \\ (1,1,e^{2\pi i(4t-3)}) & ,3/4\le t\le 1 \end{cases}$$

şi avem între acestea omotopia

$G: S^1\times I \longrightarrow S^1\vee S^1\vee S^1$, definită prin

$$G((e^{2\pi it},t')) = \begin{cases} (e^{\frac{8\pi it}{1+t'}},1,1) & ,0\le t\le \frac{t'+1}{4} \\ (1,e^{\pi i[4(2t-1)-2t']},1) & ,\frac{t'+1}{4}\le t\le \frac{t'+2}{4} \\ (1,1,e^{\frac{2\pi i(4t-t'-2)}{2-t'}}) & ,\frac{t'+2}{4}\le t\le 1 \end{cases}$$

In sfîrşit, considerăm $r_1: S^1 \longrightarrow S^1$, $r_1(e^{2\pi it}) = e^{2\pi i(1-t)}$.

Avem atunci

$$(\nabla_{S^1}(r\vee 1)\mu_1\,(e^{2\pi it}) = \begin{cases} e^{4\pi i(1-t)} & ,0\le t\le 1/2 \\ e^{2\pi i(2t-1)} & ,1/2\le t\le 1 \end{cases}$$

Considerăm omotopia $K: S^1\times I \longrightarrow S^1$, dată de

$$K(e^{2\pi it},t') = \begin{cases} 1, & 0\le t\le \frac{t'}{2} \\ e^{2\pi i(t'-2t)} & ,\frac{t'}{2}\le t\le 1/2 \\ e^{2\pi i(t'+2t)} & ,1/2\le t\le \frac{2-t'}{2} \\ 1, & \frac{2-t'}{2}\le t\le 1 \end{cases}$$

Avem $\nabla_{S^1}(r\vee 1)\mu_1 \overset{K}{\simeq} e_{S^1}$. Astfel S^1 este AH'I în raport cu μ_1.

In mod analog se poate arăta că $\mu_2: S^1 \longrightarrow S^1\vee S^1$ definită prin

$$\mu_2(e^{2\pi it}) = \begin{cases} \beta(2t), & 0\le t\le 1/2 \\ \alpha(2t-1), & 1/2\le t\le 1 \end{cases}$$

determină de asemenea pe S^1 o structură de AH'I spaţiu.

μ_1 şi μ_2 nu sînt echivalente omotopic, în caz contrar ar urma că $ab=ba$, ceea ce nu are loc deoarece $G_p\{a,b\}$ este grup liber cu generatorii a, b (nu abelian).

Fie acum $\pi_1(Y)_1 = [S^1, Y]$ cu structura de grup definită prin $[f_1] \cdot [f_2] = [\nabla(f_1 \vee f_2)\mu_1]$ (Teorema 6.3.11) şi fie $\pi_1(Y)_2 = [S^1, Y]$, cu structura de grup $[f_1] * [f_2] = [\nabla(f_1 \vee f_2)\mu_2]$.

Definim $\varphi : \pi_1(Y)_1 \longrightarrow \pi_1(Y)_2$, prin $\varphi([f]) = [f]^{-1} = [fv_1]$ (v_2 este acelaşi cu v_1). Această aplicaţie este bine definită, deoarece dacă $[f_1] = [f_2]$, atunci $f_1 v_1 \simeq f_2 v_1$. Apoi φ este un homomorfism de grupuri. In adevăr

$$\varphi([f_1] \cdot [f_2]) = \varphi([\nabla(f_1 \vee f_2)\mu_1]) = [\nabla(f_1 \vee f_2)\mu_1 v_2] \text{ şi}$$
$$\varphi([f_1]) * \varphi([f_2]) = [f_1 v_2] * [f_2 v_2] = [\nabla((f_1 v_2) \vee (f_2 v_2))\mu_2] \text{ şi}$$

se verifică direct că $\nabla((f_1 v_2) \vee (f_2 v_2))\mu_2 = \nabla(f_1 \vee f_2)\mu_1 v_2$.

Homomorfismul φ este izomorfism, avînd inversul

$\psi : \pi_1(Y)_2 \longrightarrow \pi_1(Y)_1$, $\psi([f]) = [f]^{-1} = [fv_1]$.

Fie acum $\mu : S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^1$ o structură de AH'I pe S^1. Atunci μ defineşte un drum închis în $S^1 \vee S^1$ şi putem avea cazurile:

I: $\mu \simeq \alpha^{p_1}\beta^{q_1}\alpha^{p_2}\beta^{q_2} \cdots \alpha^{p_m}\beta^{q_m}$ sau

II: $\mu \simeq \alpha^{p_1}\beta^{q_1}\alpha^{p_2}\beta^{q_2} \cdots \alpha^{p_{m-1}}\beta^{q_{m-1}}\alpha^{p_m}$

Datorită condiţiilor $p_1\mu \simeq 1_{S^1} = \alpha$ şi $p_2\mu \simeq \beta$, trebuie să avem $p_1 + \ldots + p_m = 1$ şi $q_1 + \ldots + q_m = 1$, în fiecare caz. Apoi privind $(\mu \vee 1)\mu$ şi $(1 \vee \mu)\mu$ ca drumuri închise în $S^1 \vee S^1 \vee S^1$ şi considerînd în acesta drumurile $\alpha_1(t) = (e^{2\pi it}, 1, 1)$, $\beta_1(t) = (1, e^{2\pi it}, 1)$; $\gamma_1(t) = (1, 1, e^{2\pi it})$, avem în cazul I

$$(\mu \vee 1)\mu \simeq (\alpha_1^{p_1}\beta_1^{q_1} \cdots \alpha_1^{p_m}\beta_1^{q_m})^{p_1}\gamma_1^{q_1}(\alpha_1^{p_1}\beta_1^{q_1} \cdots \alpha_1^{p_m}\beta_1^{q_m})^{p_2} \cdot \gamma_1^{q_2} \cdots (\alpha_1^{p_1}\beta_1^{q_1} \cdots \alpha_1^{p_m}\beta_1^{q_m})\gamma_1^{q_m} \text{ şi}$$

$$(1 \vee \mu)\mu \simeq \alpha_1^{p_1}(\beta_1^{p_1}\gamma_1^{q_1} \cdots \beta_1^{p_m}\gamma_1^{q_m})^{q_1}\alpha_1^{p_2}(\beta_1^{p_1}\gamma_1^{q_1} \cdots \beta_1^{p_m}\gamma_1^{q_m})^{q_2} \cdots \alpha_1^{p_m}(\beta_1^{p_1}\gamma_1^{q_1} \cdots \beta_1^{p_m}\gamma_1^{q_m})^{q_m}$$

Să presupunem că $p_1 \neq 0, q_1 \neq 0$ (în cazul I). Atunci din relaţia $(\mu \vee 1)\mu \simeq (1 \vee \mu)\mu$ deducem că $p_1 > 0, q_1 > 0$ şi

$$\alpha_1^{p_2}\beta_1^{q_2} \cdots \alpha_1^{p_m}\beta_1^{q_m}\alpha_1^{p_1}\beta_1^{q_1} \cdots \alpha_1^{p_m}\beta_1^{q_m} \cdots \simeq \cdots \simeq \gamma_1^{q_1}\beta_1^{p_2}\gamma_1^{q_2} \cdots$$

ceea ce este imposibil dacă $p_2 \neq 0$.

Aşadar cazul I poate avea loc numai în forma $\mu \simeq \alpha^{p}\cdot\beta^{q}$, cînd $p_1 \neq 0$ şi $q_1 \neq 0$. Cum avem de fapt $p=1, q=1$, rezultă $\mu \simeq \mu_1$.

In cazul II deosebim următoarele subcazuri:

(a) $p_1 > 0, q_1 > 0$. Impunînd condiţia de asociativitate deducem

$$\alpha_1^{p_1}\beta_1^{q_1}\alpha_1^{p_2}\beta_1^{q_2} \cdots \alpha_1^{p_{m-1}}\beta_1^{q_{m-1}}\alpha_1^{p_m}\alpha_1^{p_1}\beta_1^{q_1} \cdots \gamma_1^{q_1}(\alpha_1^{p_1}\beta_1^{q_1} \cdots \alpha_1^{p_m}\beta_1^{q_m})^{p_2} \cdots \simeq \alpha_1^{p_1}\beta_1^{p_1}\gamma_1^{q_1}\beta_1^{p_2}\gamma_1^{q_2} \cdots \beta_1^{p_{m-1}}\gamma_1^{q_{m-1}}\beta_1^{p_m}\beta_1^{p_1}\gamma_1^{q_1} \cdots$$

care implică $p_1 = q_1$ şi apoi sau $p_2 = 0$, sau $p_1 + p_m = 0, q_1 + q_{m-1} = 0$, $p_2 + p_{m-1} = 0, \ldots, p_{m-2} + p_3 = 0, q_{m-2} + q_2 = 0$, care implică $p_1 + \ldots + p_m = 0$, ceea ce nu este posibil. Aşadar în subcazul (a) avem $p_1 = q_1$, $p_2 = 0$ şi, repetînd, obţinem iarăşi $\mu \simeq \mu_1$.

(b) $p_1 > 0, q_1 < 0$ (şi $p_m \neq 0$). Obţinem relaţia

$$\alpha_1^{p_1}\beta_1^{q_1}\alpha_1^{p_2}\beta_1^{q_2} \cdots \alpha_1^{p_{m-1}}\beta_1^{q_{m-1}}\alpha_1^{p_m}\beta_1^{q_m}\alpha_1^{p_1}\beta_1^{q_1} \cdots \simeq \alpha_1^{p_1}\alpha_1^{-p_m}\beta_1^{-q_{m-1}} \cdots \beta_1^{-q_1}\alpha_1^{p_1}\alpha_1^{-p_m} \cdots$$

care nu este posibilă.

(c) $p_1 < 0, q_1 < 0$ nu poate avea loc.

Astfel, dacă $p_1 \neq 0$, în reprezentarea I sau II, avem $\mu \simeq \mu_1$. In mod analog, dacă $p_1 = 0$, dar $q_1 \neq 0$, se obţine $\mu \simeq \mu_2$.

6.10. Să se arate că $\pi_1(Y)$ este abelian dacă Y este un H-spaţiu (nu neapărat asociativ sau cu inversare).

Rezolvare. Dacă Y este H-spaţiu, cu "multiplicarea $m : Y \times Y \longrightarrow Y$, atunci în mulţimea $[S^1, Y]$ putem considera două operaţii interne: $[f_1]\cdot[f_2] = [\nabla(f_1 \vee f_2)\mu]$ şi $[f_1]*[f_2] = [m(f_1 \times f_2)\Delta_{S^1}]$, unde μ este "comultiplicarea "canonică pe S^1 (Propoziţia 6.3.12).

Aplicaţia constantă $\overset{e}{\vee}$ este element neutru ambele operaţii.

Apoi sînt reciproc distributive, adică $([f_1]\cdot[f_2])*([g_1]\cdot[g_2])=$
$=[\nabla(f_1\vee f_2)\mu]*[\nabla(g_1\vee g_2)\mu]=[m(\nabla(f_1\vee f_2)\mu\times\nabla(g_1\vee g_2)\mu)\Delta]=$
$=[\Delta m(f_1\times g_1)\Delta\ \vee\ m(f_2\times g_2)\Delta)\mu]=[m(f_1\times g_1)\Delta]\cdot[m(f_2\times g_2)\Delta]=$
$=([f_1]*[g_1])\cdot([f_2]*[g_2])$.

Putem arăta acum că cele două operaţii coincid şi că fiecare este comutativă (şi asociativă; vezi şi Exerciţiul 1.1):
Avem $[f_1]\cdot[f_2]=([f_1]*[e])\cdot([e]*[f_2])=([f_1]\cdot[e])*([e]\cdot[f_2])=[f_1]*[f_2]$.
Apoi, $[f_2]\cdot[f_1]=([e]*[f_2])\cdot([f_1]*[e])=([e]\cdot[f_1])*([f_2]\cdot[e])=[f_1]*[f_2]$
şi prin urmare $[f_1]\cdot[f_2]=[f_2]\cdot[f_1]$.

6.11. Dată o diagramă omotopic comutativă

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu} \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

să se arate că există o aplicaţie $\vartheta : C_f \longrightarrow C_{f'}$ încît este omotopic comutativă următoarea diagramă:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{f_1} & C_f & \xrightarrow{f_2} & sA & \longrightarrow & \cdots\cdots \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\vartheta} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda\wedge 1} & & \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{f_1'} & C_{f'} & \xrightarrow{f_2'} & sA' & \longrightarrow & \cdots\cdots \end{array}$$

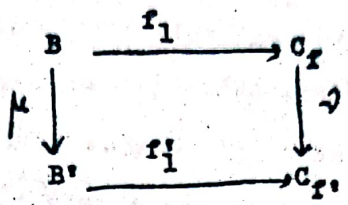
Să se arate că dacă λ şi μ sînt echivalenţe omotopice, atunci şi ϑ este echivalenţă omotopică.

Rezolvare. Dacă diagrama dată este chiar comutativă, afirmaţia ce se cere dovedită este demonstrată în Propoziţia 6.4.8. Aici avem doar comutativitatea omotopică a diagramei, adică $\mu f \simeq f'\lambda$. Fie $F: A\times I \longrightarrow B'$, omotopia corespunzătoare, deci $F(a,0)=\mu f(a)$ şi $F(a,1)=f'\lambda(a)$.
Vom defini aplicaţia $\vartheta : C_f \longrightarrow C_{f'}$ prin

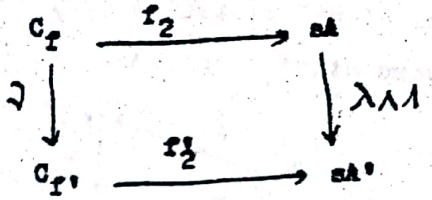
$$\begin{cases} \vartheta(b)=\mu(b), \text{ pentru } b\in B, \\ \vartheta(a\wedge t)=\begin{cases} F(a,2t), & 0\le t\le 1/2 \\ \lambda(a)\wedge(2t-1), & 1/2\le t\le 1 \end{cases} \quad (a\wedge t)\in cA \end{cases}$$

Pentru $t=1/2$, avem $F(a,1) = f' \lambda(a)$, care se identifică în C_f, cu $\lambda(a) \wedge 0$. Apoi, dacă $b=f(a)$, avem $F(a,0) = \mu f(a)$ și $\vartheta(b) = \mu f(a)$. Conform Lemei "de lipire", deoarece B și cA sînt submulțimi închise ale lui C_f, rezultă că ϑ este continuă.

Apoi, diagrama



este comutativă, deoarece $\vartheta f_1(b) = \vartheta(b) = \mu(b) = f_1'(\mu(b))$, $\forall$ $b \in B$. Să arătăm că este omotopic comutativă diagrama



Anume, avem $(\lambda \wedge 1) f_2(b) = (\lambda \wedge 1)\, \phi\, (b \wedge 0)$ = pct. bază,.

$(\lambda \wedge 1) f_2(a \wedge t) = (\lambda \wedge 1)(a \wedge 2) = (\lambda(a) \wedge t)$ și

$(f_2' \cdot \vartheta)(b) = f_2'(\mu(b))$ = pct. bază,

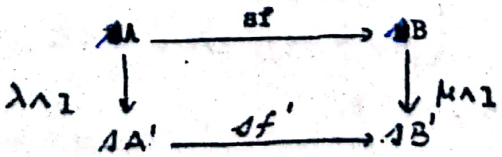
$$(f_2' \vartheta)(a \wedge t) = \begin{cases} \text{pct. bază} \quad (F(a,2t) \in B'), & 0 \le t \le 1/2 \\ \lambda(a) \wedge (2t-1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Se definește aplicația $G : C_f \times I \longrightarrow sA'$

prin $G(b,t)$ = pct. bază, $\forall$ $(b,t) \in B \times I$,

$$G((a \wedge t), t') = \begin{cases} \lambda(a) \wedge (1-t')t, & 0 \le t \le 1/2 \\ \lambda(a) \wedge (t+tt'-t'), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Se verifică imediat că G este omotopie a aplicațiilor $(\lambda \wedge 1) f_2$ și $f_2' \vartheta$. Este suficient să mai verificăm comutativitatea omotopică a diagramei

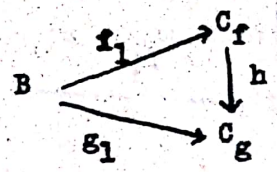


Avem $((\mu \wedge 1)sf([a \wedge t]) = (\mu \wedge 1)([f(a) \wedge t]) = [\mu f(a) \wedge t]$ şi $(sf'(\lambda \wedge 1))[a \wedge t] = sf'[\lambda(a) \wedge t] = [f'\lambda(a) \wedge t]$. Se defineşte o omotopie între cele două aplicaţii prin

$G : sA \times I \longrightarrow sB'$, $G([a \wedge t), t') = [F(a, t') \wedge t]$.

Să presupunem acum că λ şi μ sînt echivalenţe omotopice. Avem de arătat că în acest caz γ este o echivalenţă omotopică. Pentru aceasta vom considera mai întîi unele cazuri particulare:

(i). Dacă $f, g : A \longrightarrow B$ sînt două aplicaţii omotope, atunci există o echivalenţă omotopică $h : C_f \longrightarrow C_g$, astfel încît este comutativă diagrama.



Pentru a construi pe h, fie $F : A \times I \longrightarrow B$ o omotopie a lui f cu g. Definim aplicaţia h astfel:

$$h(a \wedge t) = \begin{cases} a \wedge 2t & , 0 \leq t \leq 1/2 \\ F(a, 2-2t) & , 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \text{, pentru } a \wedge t \in cA$$

şi $h(b) = b$, pentru $b \in B$.

Construim $k : C_g \longrightarrow C_f$, prin:

$$k(a \wedge t) = \begin{cases} a \wedge 2t & , 0 \leq t \leq 1/2 \\ F(a, 2t-1 & , 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \text{, } a \wedge t \in cA$$

şi $k(b) = b$, pentru $b \in B$.

Avem atunci:

$$kh(a \wedge t) = \begin{cases} a \wedge 4t, & 0 \leq t \leq 1/4 \\ F(a, 4t-1), & 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ F(a, 2-2t), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \text{, dacă } a \wedge t \in cA$$

şi $kh(b) = b$, $\forall b \in B$.

Omotopia aplicaţiei kh cu identitatea este aplicaţia

$H: C_f \times I \longrightarrow C_f$, definită prin

$$H((a\wedge t),t') = \begin{cases} a \wedge \dfrac{4t}{1+3t'}, & 0 \le t \le \dfrac{1+3t'}{4} \\ F\left(a, \dfrac{4t}{1+3t'} - 1\right), & 0 \le t' \le 1/3, \ \dfrac{1+3t'}{4} \le t \le 1/2 \\ F\left(a, \dfrac{2}{1+3t'} - 2t\right), & 0 \le t' \le 1/3, \ 1/2 \le t \le \dfrac{1}{1+3t'} \\ f(a), & 0 \le t' \le 1/3 \text{ şi } \dfrac{1}{1+3t'} \le t \le 1 \text{ sau dacă} \\ & 1/3 \le t' \le 1 \text{ şi } \dfrac{1+3t'}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$

$H(b,t') = b, \ \forall\, b \in B, t' \in I$.

In mod cu totul asemănător se arată că avem $hk \simeq 1_{C_g}$.

(ii) Diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{f_1} & C_f \\ {\scriptstyle 1_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \\ A & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{f_1'} & C_{f'} \end{array}$$

în care μ este o echivalenţă omotopică, poate fi completată cu o echivalenţă omotopică $\nu : C_f \longrightarrow C_{f'}$ încît să rămînă comutativă.

Definim $\nu : C_f \longrightarrow C_{f'}$ prin $\nu(a\wedge t) = a \wedge t$, pentru $a \wedge t \in cA$ şi $\nu(b) = \mu(b), \ \forall\, b \in B$. Fie $\mu' : B' \longrightarrow B$ o invers omotopă a lui μ. Definim atunci $\nu' : C_{f'} \longrightarrow C_{\mu' f'}$ prin: $\nu'(a\wedge t) = a \wedge t$ şi $\nu'(b') = \mu'(b'), \ \forall\, b' \in B'$.

Deoarece $f \simeq \mu' \mu f = \mu' f'$, după (i) se poate găsi o echivalenţă omotopică $h : C_{\mu' f'} \longrightarrow C_f$, care este identitate pe B. Alegem o omotopie $F: \mu' \mu \simeq 1_B$. Atunci compunerea $h \nu' \nu$ se poate scrie astfel:

$$h\nu'\nu\,(a\wedge t) = \begin{cases} a \wedge 2t, & 0 \le t \le 1/2 \\ F((f(a), 2-2t), & 1/2 \le t \le 1 \text{ şi} \end{cases}$$

$h\,\nu'\nu\,(b) = b, \ \forall\, b \in B$.

Definim acum $H: C_f \times I \longrightarrow C_f$, prin

$$H(a \wedge t, t') = \begin{cases} a \wedge \frac{2t}{1+t'}, & 0 \leq t \leq \frac{1+t'}{2} \\ F(f(a), 2-2t+t'), & \frac{1+t'}{2} \leq t \leq 1; \end{cases}$$

$H(b,t') = F(b,t'), b \in B, t' \in I$.

Se verifică uşor că $H: h\nu'\nu \simeq 1_{C_f}$. Cum h este echivalenţă omotopică rezultă că $\nu'\nu$ este o echivalenţă omotopică. Dar în acelaşi fel se arată că şi $\nu\nu'$ este echivalenţă omotopică. Rezultă de aici că ν este echivalenţă omotopică.

(iii). Diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{f_1} & C_f \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_B} & & \\ A & \xrightarrow{f'} & B & \xrightarrow{f_1'} & C_{f'} \end{array}$$

în care λ este echivalenţă omotopică, poate fi completată cu o echivalenţă omotopică $\nu: C_f \longrightarrow C_{f'}$, în aşa fel încît să, rămînă comutativă.

Definim $\nu: C_f = C_f, \longrightarrow C_{f'}$, astfel: $\nu(a \wedge t) = \lambda(a) \wedge t$ şi $\nu(b) = b$, $b \in B$.

Notînd cu $\lambda': A' \longrightarrow A$ o invers omotopă cu λ, definim în mod similar, aplicaţia $\nu': C_{f\lambda'} \longrightarrow C_f$, prin

$\nu'(a' \wedge t) = \lambda'(a') \wedge t$ şi $\nu'(b) = b, b \in B$.

Avem $f\lambda' = f'\lambda\lambda' \simeq f'$ şi, după (i), există $h: C_{f\lambda'} \longrightarrow C_{f'}$, o echivalenţă omotopică, dată prin

$$h(a' \wedge t) = \begin{cases} a' \wedge 2t, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ f'F(a', 2-2t), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$h(b) = b, b \in B$, unde $F: \lambda\lambda' \simeq 1_{A'}$.

Putem construi atunci o omotopie între $\nu\nu'$ şi h, anume aplicaţia $H: C_{f\lambda'} \times I \longrightarrow C_{f'}$, definită prin:

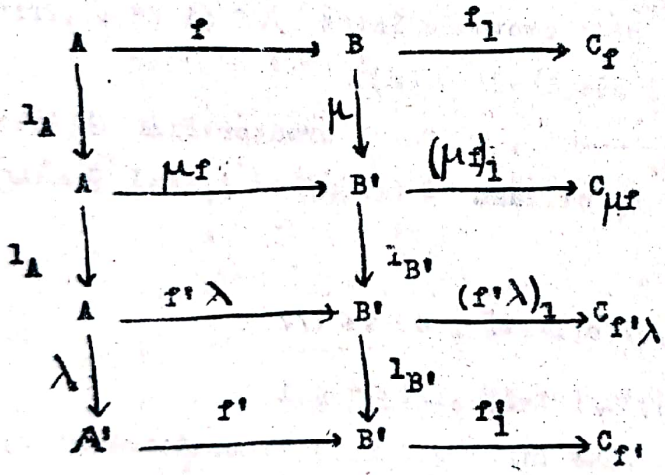
$$H((a' \wedge t), t') = \begin{cases} F(a', 1-t') \wedge \dfrac{2t}{1+t'} & , \ 0 \leq t \leq \dfrac{1+t'}{2} \\ f' F(a', 2-2t), & \dfrac{1+t'}{2} \leq t \leq 1; \end{cases}$$

$H(b,t') = b, b \in B, t' \in I.$

Din echivalenaţa omotopică $H: \nu\nu' \simeq h$, deducem că $\nu\nu'$ este o echivalenţă omotopică. In mod asemănător se arată că $\nu'\nu$ este echivalenţă omotopică. In concluzie ν este echivalenţă omotopică.

In sfîrşit, considerăm cazul general, deci cu diagrama din enunţ omotopic comutativă şi cu λ şi μ echivalenţe omotopice.

Considerăm următoarea diagramă



Aceasta poate fi completată cu echivalenţele omotopice următoare: $\nu_1 : C_f \longrightarrow C_{\mu f}$ (dată de (ii); $\nu_2 : C_{\mu f} \longrightarrow C_{f'\lambda}$ (dată de (i) şi $\nu_3 : C_{f'\lambda} \longrightarrow C_{f'}$ (dată de (iii). Luînd acum $\nu = \nu_3 \nu_2 \nu_1$, aceasta este echivalenţă omotopică între C_f şi $C_{f'}$.

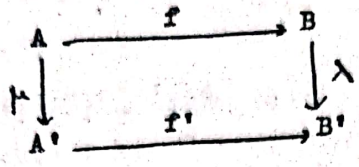
Este de asemenea uşor de văzut că această aplicaţie coincide cu cea construită în prima parte, sau direct, că asigură comutativitatea diagramei mari din enunţ.

6.12. Să se stabilească rezultatele "duale" acelora din Exerciţiul 6.11.

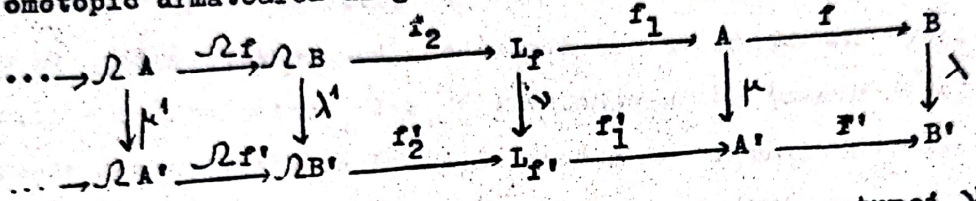
Rezolvare:

Enunţul ce se cere dovedit este generalizarea Propoziţiei 6.4.15. Anume:

Dată o diagramă omotopic comutativă



există o aplicaţie $\nu : L_f \longrightarrow L_{f'}$, încît este comutativă omotopic următoarea diagramă:



Dacă în plus μ şi λ sînt echivalenţe omotopice, atunci ν este o echivalenţă omotopică.

Fie $F: A \times I \longrightarrow B'$ o omotopie între λf şi $f'\mu$. Prin urmare $F(a,0) = \lambda f(a)$ şi $F(a,1) = f'\mu(a)$.

Definim atunci $\nu : L_f \longrightarrow L_{f'}$ în felul următor: Fie $\theta(t) = F(a,1-t)$, pentru $(a,\omega) \in L_f$ şi luăm $\nu((a,\omega)) = (\mu(a), \theta \circ \lambda\omega)$, adică:

$$\nu((a,\omega)) = \begin{cases} (\mu(a), F(a,1-2t)) , & 0 \le t \le 1/2 \\ (\mu(a), \lambda\omega(2t-1)) , & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Se verifică imediat că ν este bine definită şi continuă şi că $(\mu(a), \theta \circ \lambda) \in L_{f'}$. Avem apoi $\mu f_1((a,\omega)) = \mu(a) = f'_1 \nu((a,\omega))$.

Putem de asemenea defini o omotopie $H: \nu f_2 \simeq f'_2 \lambda^1$. Avem $\nu f_2(\omega) = (a'_0, e_{b'_0})$ şi $f'_2 \lambda^1(\omega) = f'_2(\lambda\omega) = (a'_0, \lambda\omega)$. Luăm atunci $H(\omega, t) = (a'_0, \theta_t)$, unde

$$\theta_t(t') = \begin{cases} b'_0, & 0 \le t' \le \frac{1-t}{2} \\ \omega\left(\frac{2t'-1+t}{1+t'}\right), & \frac{1-t}{2} \le t' \le 1 \end{cases}$$

Pentru partea a 2-a, cînd λ şi μ sînt echivalenţe omotopice, se procedează ca în Exerciţiul 6.11, considerînd cazurile particulare corespunzătoare (duale) la (i), (ii), (iii).

6.13. Dată o aplicaţie $f:S^n \longrightarrow X$, fie Y spaţiul de adjuncţie $X \cup_f E^{n+1}$. Să se arate că $Y \cong C_f$ şi să se deducă de aici că $S^m \times S^n \cong C_\theta$, unde $\theta: S^{m+n-1} \longrightarrow S^m \vee S^n$ este o aplicaţie ce se cere determinată.

Rezolvare. Avem $X \cup_f E^{n+1} = X \cup E^{n+1}/R_1$, unde xRy dacă şi numai dacă: $x=y$ sau $x \in S^n$ şi $y=f(x)$ şi $C_f = X \cup cS^n/R_2$, unde xR_2y dacă şi numai dacă: $x=s \wedge 0$ şi $y=f(x)$, sau $x=y$. Dar E^{n+1} este homeomorf cu cS^n şi cele două relaţii de echivalenţă sînt compatibile cu homeomorfismul respectiv: $Y \cong C_f$.

Pentru partea a 2-a, considerăm aplicaţiile

$E^m \xrightarrow{p_1} E^m/S^{m-1} \xrightarrow{\bar{\theta}_1} S^m$ şi

$E^n \xrightarrow{p_2} E^n/S^{n-1} \xrightarrow{\bar{\theta}_2} S^n$, unde $\bar{\theta}_i$ sînt homeomorfisme canonice (vezi Propoziţia 1.4.38).

Definim atunci aplicaţia

$\theta: S^{m+n-1} = E^m \times S^{n-1} \cup S^{m-1} \times E^n \longrightarrow S^m \vee S^n$

prin $\theta(x,y) = \bar{\theta}_1(p_1(x)) \vee 1$, $x \in E^m, y \in S^{n-1}$ şi

$\theta(x',y') = (1 \vee \bar{\theta}_2 p_2(y'))$, dacă $x' \in S^{m-1}, y' \in E^n$ (Pentru identificarea $S^{m+n-1} \cong E^m \times S^{n-1} \cup S^{m-1} \times E^n$, să se vadă homeomorfismul $h_{m,n}: E^{m+n} \longrightarrow E^m \times E^n$, pg.21). Aplicaţia θ este bine definită şi continuă. Conform primei părţi avem $C_\theta \cong E^{m+n} \cup_\theta (S^m \vee S^n)$. Să arătăm că spaţiul de aqjuncţie din dreapta relaţiei este homeomorf cu $S^m \times S^n$. Definim aplicaţia

$\phi: (E^m \times E^n) \cup_\theta (S^m \vee S^n) \longrightarrow S^m \times S^n$, prin

$\phi(x,y) = (\bar{\theta}_1(p_1(x)), \bar{\theta}_2(p_2(y)))$, pentru $(x,y) \in E^m \times E^n$ şi

$\Psi: S^m \times S^n \longrightarrow (E^m \times E^n) \cup_\theta (S^m \vee S^n)$, prin $\Psi(z_1,z_2) = \Psi(\bar{\theta}_1(x), \bar{\theta}_2(y)) = (x,y)$. Avem că ϕ şi Ψ sînt inverse una celeilalte şi deci sînt homeomorfisme.

Observaţie: Rezultă din cele de mai sus că produsul $S^m \times S^n$ este un CW-complex avînd cîte o celulă de dimensiuni 0, m, n, m+n.

6.14. Dat un spaţiu X şi elementele $\alpha \in \pi_m(X)$, $\beta \in \pi_n(X)$, produsul Whitehead $[\alpha,\beta] \in \pi_{m+n-1}(X)$ este definit astfel. Reprezentăm α şi β prin aplicaţiile $f: S^m \longrightarrow X$ şi respectiv $g: S^n \longrightarrow X$ şi atunci, $[\alpha,\beta]$ este reprezentat de compunerea

$$S^{m+n-1} \xrightarrow{\theta} S^m \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X \vee X \xrightarrow{\nabla} X$$

unde θ este aplicaţia considerată în Exerciţiul 6.13.

Să se arate că dacă X este un H-spaţiu, atunci $[\alpha,\beta]=0$, pentru $\forall \alpha, \beta$. Reciproc, să se arate că S^n este un H-spaţiu dacă $[\iota_n, \iota_n]=0$, unde ι_n este elementul din $\pi_n(S^n)$ reprezentat de aplicaţia identitate.

Rezolvare. Fie H-spaţiul X cu multiplicarea $m: X \times X \longrightarrow X$ (Definiţia 6.3.7). Considerăm $\alpha=[f]$, $\beta=[g]$, ca în enunţ. Identificăm S^{m+n-1} cu $E^m \times S^{n-1} \cup S^{m-1} \times E^n$ prin homeomorfismul standard $h_{m,n}$.

Avem atunci $(\nabla(f \vee g)\theta)(x,y) = \nabla(f \vee g)(\overline{\theta}\, p_1(x) \vee 1) =$
$= \nabla(f\, \overline{\theta}\, p_1(x) \vee 1) = f\, \overline{\theta}(p_1(x))$ şi în mod analog $\nabla(f \vee g)(x',y')$
$= \nabla(f \vee g)(1 \vee \overline{\theta} p_2(y')) = g\, \overline{\theta} p_2(y')$.

Putem considera aplicaţia
$m(f \times g): S^m \times S^n \xrightarrow{f \times g} X \times X \xrightarrow{m} X$, care are proprietăţile
$m(f \times g)(s,1) = m(f(s), x_0) = m i_1 f(s)$ şi
$m(f \times g)(1,s) = m(x_0, g(s)) = m i_2 g(s)$. Apoi, deoarece $m i_1 \simeq m i_2 \simeq 1_X$, obţinem $m(f \times g)/S^m \times 1 \simeq f$ şi $m(f \times g)/1 \times S^n \simeq g$.

Ţinînd seama de definiţia lui θ (Ex. 6.13) şi de relaţiile de mai sus, deducem că $\nabla(f \vee g)\theta \simeq m(f \times g)\pi / S^{m+n-1}$, membrul drept fiind restricţia compunerii

$$E^{m+n} \equiv E^m \times E^n \xrightarrow{\pi} (E^m \times E^n) \cup_\theta (S^m \vee S^n) \xrightarrow{m(f \times g)} X.$$

Dar, deoarece $m(f \times g)\pi / S^{m+n-1}$ are o prelungire la E^{m+n}, deducem imediat că este omotopă cu aplicaţia constantă.

Prin urmare $\nabla(f \vee g)\theta \simeq$ const. Prin urmare $[\alpha,\beta]=0$.

Să presupunem acum că $[\iota_n, \iota_n]=0$. Aceasta înseamnă că aplicaţia $\nabla\theta : S^{2n-1} \longrightarrow S^n \vee S^n \longrightarrow S^n$ este omotopă cu o aplicaţie constantă. Prin urmare, $\nabla\theta$ se poate extinde la o aplicaţie $f: E^{2n} = cS^{2n-1} \longrightarrow S^n$. Deoarece C_θ se obţine din cS^{2n-1} şi $S^n \vee S^n$ (identificînd $s \wedge 0 \in cS^{2n-1}$ cu $\theta(s)$), putem defini $g: C_\theta \longrightarrow S^n$, încît $g/cS^{2n-1} = f$ şi $g/S^n \vee S^n = \nabla$.

Pe de altă parte, fie $h: S^n \times S^n \longrightarrow C_\theta$, echivalenţa omotopică din Exerciţiul 6.13. Aplicaţia $m = gh: S^n \times S^n \longrightarrow S^n$ satisface condiţiile $mi_1 \simeq mi_2 \simeq 1_{S^n}$.

6.15. Date două spaţii X şi Y, fie $i: X \vee Y \longrightarrow X \times Y$ incluziunea. Considerînd aplicaţia $f: c(X \times Y) \longrightarrow sX \vee sY$ definită prin

$$f((x,y) \wedge t) = \begin{cases} (x \wedge 2t, \text{pct. bază}) & (0 \leq t \leq 1/2) \\ (\text{pct. bază}, y \wedge (2t-1)) & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

să se arate că $i_2: C_i \longrightarrow s(X \vee Y)$ este omotopă cu aplicaţia constantă. Să se deducă rezultatele:

(a) Dacă $s: \pi_n(X) \longrightarrow \pi_{n+1}(sX)$ este homomorfismul care aplică elementul reprezentat prin $f: S^n \longrightarrow X$ în elementul reprezentat prin $f \wedge 1: S^n \wedge S^1 \longrightarrow X \wedge S^1$, atunci $s[\alpha, \beta] = 0$, pentru toţi α, β.

(b) Dacă i este o cofibrare, atunci

$$s(X \times Y) \simeq sX \vee sY \vee s(X \wedge Y).$$

Rezolvare.

Fie $k: s(X \vee Y) \longrightarrow s(X \vee Y)$, aplicaţia definită prin

$$k((x,y),t) = \begin{cases} ((x_0,y),2t), & t \in [0,1/2] \\ ((x,y_0),2t-1), & t \in [1/2,1] \end{cases}$$

Rezultă uşor că avem $k \simeq 1_{s(X \vee Y)}$. Va rezulta că $i_2 \simeq \text{const.}$ dacă vom arăta că avem $ki_2 \simeq \text{const.}$ Dar ki_2 este următoarea compunere

$$C_1 = c(X \vee Y) \cup_1 (X \times Y) \longrightarrow c(X \times Y) \xrightarrow{f} sX \vee sY \equiv s(X \vee Y).$$

Deoarece $o(X \times Y)$ este contractibil, rezultă că avem în adevăr $ki_1 \simeq const.$

(a) $s[\alpha,\beta]$, pentru $\alpha = [g] \in \pi_m(X)$ și $\beta = [h] \in \pi_n(X)$, este (vezi Exercițiul 6.14) de aplicația

$$S^{m+n} \equiv S^{m+n-1} \wedge S^1 \xrightarrow{\theta \wedge 1} (S^m \vee S^n) \wedge S^1 \xrightarrow{(g \vee h) \wedge 1} (X \vee X) \wedge S^1 \xrightarrow{\nabla \wedge 1} X \wedge S^1.$$

Putem scrie aceasta ca următoarea compunere:

$$S^{m+n} \xrightarrow{h_{m+n,1}} S^{m+n-1} \times E^1 \cup E^{m+n} \times S^0 \xrightarrow{p} S^{m+n-1} \wedge (E^1/S^0) \xrightarrow{h_{m,n} \wedge \lambda} (E^m \times S^{n-1} \cup S^{m-1} \times E^n) \wedge S^1 \xrightarrow{\theta' \wedge 1} ((E^m/S^{m-1}) \vee (E^n/S^{n-1})) \wedge S^1 \xrightarrow{(f \vee g) \wedge 1} (X \vee X) \wedge S^1 \xrightarrow{\nabla \wedge 1} X \wedge S^1,$$

unde λ este homeomorfism evident $E^1/S^0 \equiv S^1$ și $\theta' : E^m \times S^{n-1} \cup S^{m-1} \times E^n \longrightarrow (E^m/S^{m-1}) \vee (E^n/S^{n-1})$. Încă putem scrie aceasta ca fiind compunerea:

$$S^{m+n} \xrightarrow{h_{m+n,1}} S^{m+n-1} \times E^1 \cup E^{m+n} \times S^0 \xrightarrow{h_{m,n} \times 1} (E^m \times S^{n-1} \cup S^{m-1} \times E^n) \times E^1 \cup (E^m \times E^n) \times S^0 \xrightarrow{\theta' \times 1} ((E^m/S^{m-1}) \vee (E^n/S^{n-1})) \times E^1 \cup ((E^m/S^{m-1}) \times (E^n/S^{n-1})) \times S^0 \xrightarrow{p'} ((E^m/S^{m-1}) \vee (E^n/S^{n-1})) \wedge I \cup ((E^m/S^{m-1}) \times (E^n/S^{n-1})) \times 0 = c_1 \xrightarrow{i_2} ((E^m/S^{m-1}) \vee (E^n/S^{n-1})) \wedge S^1 \xrightarrow{(f \vee g) \wedge 1} (X \vee X) \wedge S^1 \xrightarrow{\nabla \wedge 1} X \wedge S^1,$$

unde $\theta' : E^m \times E^n \longrightarrow (E^m/S^{m-1}) \times (E^n/S^{n-1})$ este produsul proiecțiilor de factorizare. Conform primei părți $i_2 \simeq const.$ și prin urmare aplicația de mai sus este omotopă cu const. Prin urmare, $s[\alpha,\beta] = 0$.

(b) Conform cu Teoremele 6.4.7 și 6.5.2, pentru orice spațiu Z are loc șirul exact

$$[S^2(X \vee Y), Z] \xrightarrow{(si_2)^*} [s(X \wedge Y), Z] \xrightarrow{(si_1)^*} [s(X \times Y), Z] \xrightarrow{(si)^*} [s(X \vee Y), Z] \xrightarrow{i_2^*} \ldots$$

Deoarece $i_2 \simeq$ const., rezultă $i_2^* = 0$ şi $(si_2)^* = 0$.

Avem prin urmare şirul exact

$$0 \longrightarrow [s(X \wedge Y), Z] \xrightarrow{(si_1)^*} [s(X \times Y), Z] \xrightarrow{(si)^*} [s(X \vee Y), Z] \longrightarrow 0$$

care poate fi scris ca şirul exact de grupuri

$$(*)\quad 0 \longrightarrow [X \wedge Y, \Omega Z] \xrightarrow{i_1^*} [X \times Y, \Omega Z] \xrightarrow{i^*} [X \vee Y, \Omega Z] \longrightarrow 0.$$

Aplicaţia $f : c(X \times Y) \longrightarrow sX \vee sY$ induce o aplicaţie continuă

$$f' : s(X \times Y) \longrightarrow sX \vee sY.$$

La rîndul său, aplicaţia f' induce homomorfismul

$$(f')^* : [s(X \vee Y), Z] \longrightarrow [s(X \times Y), Z],$$

încît $f'(si) \simeq 1_{s(X \vee Y)}$. Avem prin urmare $(si)^*(f')^* = (f'(si))^* = 1_{[s(X \vee Y), Z]}^*$.

Considerăm acum aplicaţia

$$\gamma : s(X \times Y) \longrightarrow s(X \wedge Y) \vee s(X \vee Y),$$

definită prin:

$$\gamma((x,y),t) = \begin{cases} [(x \wedge y, 2t), \text{pct. bază}], & 0 \leq t \leq 1/2 \\ [\text{pct. bază}, f'((x,y), 2t-1)], & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Aplicaţia γ induce, pentru fiecare spaţiu Z, un homomorfism

$$\gamma^* : [s(X \wedge Y) \vee s(X \vee Y), Z] \cong [s(X \wedge Y), Z] \oplus [s(X \vee Y), Z] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow [s(X \times Y), Z]$$

(Am ţinut seama că şirul (*) este scindat).

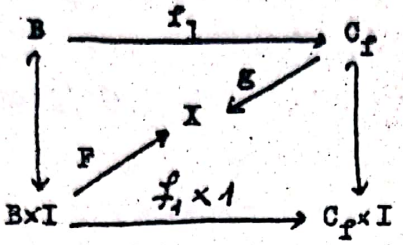
Avem, în mod evident

$$\gamma^* / [s(X \wedge Y), Z] = (si_1)^* \text{ şi } \gamma^* / [s(X \vee Y), Z] = (f')^*.$$

Prin urmare, γ^* este izomorfism pentru orice Z. Rezultă de aici imediat că γ este o echivalenţă omotopică.

6.16. Dată o aplicație $f:A \longrightarrow B$, să se arate că $f_1:B \longrightarrow C_f$ este o cofibrare și că $f_1':L_f \longrightarrow A$ este o fibrare.

Rezolvare. Fie diagrama

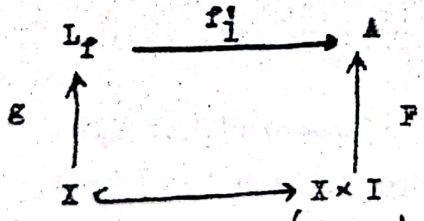


unde $f_1(\hat{b})=b$, $F(b,0)=g(\hat{b})$. Definim $G:C_f \times I \longrightarrow X$, prin $G(\hat{b},t)=F(b,t)$, $\forall\, b \in B$, $\forall\, t \in I$ și

$$G((a \wedge t'),t) = \begin{cases} F(f(a),t-2t') & , \ 0 \leq t' \leq \frac{t}{2} \\ g(a \wedge \frac{2t'-t}{2-t}), & \frac{t}{2} \leq t' \leq 1 \end{cases}$$

$a \in A$, $t, t' \in I$. Pentru $t' = \frac{t}{2}$ avem $F(f(a),0)=g(f_1(f(a)))=g(f(a))=g(a \wedge 0)$. Apoi, dacă $b=f(a)$, se identifică b cu $a \wedge 0$. Avem $G((a \wedge 0),t)=F(f(a),t)=F(b,t)$. Rezultă că F este bine definită și este continuă. Avem apoi $G(x,0)=g(x)$, $\forall\, x \in C_f$ și $G(b,t)=F(b,t)$, $\forall\, (b,t) \in B \times I$. Deci f_1 de mai sus este o cofibrare.

Să considerăm acum diagrama



unde $f_1'(a,\alpha)=a$, pentru $L_f=\{(a,\alpha) / \alpha(0)=f(a), \alpha(1)=b_0\}$ și $F(x,0)=f_1'(g(x))$. Definim omotopia $G:X \times I \longrightarrow L_f$, sub forma $G(x,t)=(F(x,t), \alpha(x,t))$, și anume dacă $g(x)=(a_x, \alpha_x)$, luăm

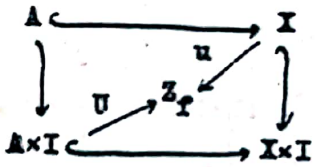
$$\alpha(x,t)\ (t') = \begin{cases} f(F(x,t-2t')) & , \ 0 \leq t' \leq \frac{t}{2} \\ \alpha_x(\frac{2t'-t}{2-t}), & \frac{t}{2} \leq t' \leq 1 \end{cases}$$

$\alpha(x,t)$ este continuă, cum se verifică imediat. Apoi $\alpha(x,t)(0)=f(F(x,t))$ și $\alpha(x,t)(1)=\alpha_x(1)=b_0$. Astfel că $(F(x,t),\alpha_2(x,t))\in L_f$ și aplicația G astfel definită este continuă. Avem apoi $G(x,0)=(F(x,0),\alpha(x,0))=(a_x,\alpha_x)=g(x)$. In sfîrșit, $f_1(G(x,t))=F(x,t)$, astfel că f_1 este o fibrare.

6.17. Să se arate că dacă (X,A) are proprietatea de extensie absolută a omotopiei și $f\simeq g: A\longrightarrow Y$, atunci spațiile de adjuncție $Y\cup_f X$ și $Y\cup_g X$ sînt echivalente omotopic.

Rezolvare. Fie Z_f spațiul obținut din $X\times 0\cup(A\times I)/(x_0\times I)\cup Y$ identificînd $(a,1)$ cu $f(a)$, pentru $\forall a\in A$. Vom arăta că $Y\cup_f X\simeq Z_f$, $Y\cup_g X\simeq Z_g$ și că $Z_f\simeq Z_g$.

Considerăm diagrama



cu $u(x)=\widehat{(x,0)}$ și $U(a,t)=\widehat{(a,t)}$. Din proprietatea de extensie absolută a omotopiei pentru perechea (X,A), există $U':X\times I\longrightarrow Z_f$, cu $U'(a,t)=U(a,t)$, $\forall (a,t)\in A\times I$ și $U'(x,0)=u(x)$. Fie $u':X\longrightarrow Z_f$, definită prin $u'(x)=U'(x,1)$. Putem defini atunci $\alpha: Y\cup_f X\longrightarrow Z_f$, prin $\alpha([y])=\hat{y}$, dacă $y\in Y$ și $\alpha([x])=u'(x)$, pentru $x\in X$. Pentru $a\in A$, avem $[a]=[f(a)]$ și $\alpha([f(a)])=\widehat{f(a)}$, $\alpha([a])=u'(a)=U'(a,1)=U(a,1)=\widehat{(a,1)}=\widehat{f(a)}$, deci α este bine definită (și continuă).

Fie apoi, $\beta: Z_f\longrightarrow Y\cup_f X$, definită prin $\beta(\widehat{(x,0)})=[x]$, $\forall x\in X$; $\beta(\hat{y})=[y]$, $\forall y\in Y$ și $\beta(\widehat{(a,t)})=[f(a)]$, $\forall (a,t)\in A\times I$.

Avem atunci:

$\alpha\beta(\widehat{(x,0)})=\alpha[x]=u'(x)$, $\forall x\in X$; $\alpha\beta(\hat{y})=\alpha([y])=\hat{y}$, $\forall y\in Y$ și

$\alpha\beta(\widehat{(a,t)}) = \alpha[f(a)] = \widehat{f(a)} = \widehat{(a,1)}$.

Definim $H: Z_f \times I \longrightarrow Z_f$, prin $H(\widehat{(x,0)},t') = U'(x,t')$, $\forall (x,0) \in X \times 0, t' \in I, H(\hat{y},t') = \hat{y}$; $\forall y \in Y, H(\widehat{(a,t)},t') = \widehat{(a,(1-t')t+t')}$.

Se verifică imediat că H este bine definită şi că este o omotopie între $\alpha\beta$ şi Id_{Z_f}.

Avem apoi $\beta\alpha([x]) = \beta(u'(x))$ şi $\beta\alpha([y]) = \beta(\hat{y}) = [y]$.

Definim omotopia

$H': (Y \cup_f X) \times I \longrightarrow Y \cup_f X$, prin

$H'([y],t') = [y]$, $\forall y \in Y$ şi $H'([x],t') = \beta U'(x,t')$. Aceasta este bine definită şi se verifică imediat că este o omotopie între $\beta\alpha$ şi $Id_{Y \cup_f X}$.

Avem aşadar că $Y \cup_f X \simeq Z_f$. In mod asemănător se arată că avem $Y \cup_g X \simeq Z_g$. Să presupunem acum că $f \simeq g$ şi să arătăm că $Z_f \simeq Z_g$. Fie $F: A \times I \longrightarrow Y$ homotopia între f şi g

Definim aplicaţiile $\varphi: Z_f \longrightarrow Z_g$ şi $\psi: Z_g \longrightarrow Z_f$ prin $\varphi(\widehat{(x,0)}) = \widetilde{(x,0)}$; $\varphi(\hat{y}) = \tilde{y}$ şi

$$\varphi(\widehat{(a,t)}) = \begin{cases} \widetilde{(a,2t)}, & 0 \le t \le 1/2 \\ \widetilde{F(a,2t-1)}, & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

şi respectiv $\psi(\widetilde{(x,0)}) = \widehat{(x,0)}$; $\psi(\tilde{y}) = \hat{y}$;

$$\psi(\widetilde{(a,t)}) = \begin{cases} \widehat{(a,2t)}, & 0 \le t \le 1/2 \\ \widehat{F(a,2-2t)}, & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Aceste aplicaţii sînt continue şi se poate arăta uşor că avem $\psi\varphi \simeq Id$ şi $\varphi\psi \simeq Id$.

6.18. O aplicaţie $f:A \longrightarrow B$ este numită fibrare Serre dacă este satisfăcută Definiţia 6.5.6 pentru toate poliedrele X şi fibra este $F=f^{-1}(b_0)$. Să se arate că există o aplicaţie $g:F \longrightarrow L_f$ cu proprietatea că, dacă X este un poliedru, $g_*:[X,F] \longrightarrow [X,L_f]$ este o bijecţie. Să se deducă de aici că dacă $i:F \longrightarrow A$ este incluziunea, există un şir exact $\ldots \longrightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(A) \xrightarrow{f_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(F) \xrightarrow{i_*} \ldots$

Rezolvare: Aşadar, $f:A \longrightarrow B$ este o fibrare Serre, dacă pentru orice poliedru X şi orice aplicaţie $h:X \longrightarrow A$ şi omotopie $H:X \times I \longrightarrow B$ care începe cu fh, există o omotopie $G:X \times I \longrightarrow A$ care începe cu h şi satisface $fG=H$.

Definim aplicaţia $g:F \longrightarrow L_f = \{(a,\alpha) \in A \times LB / \alpha(0)=f(a), \alpha(1)=b_0\}$, prin $g(a)=(a,e_{b_0})$, pentru $e_0=e_{b_0}$ este drumul constant. Deoarece $a \in F=f^{-1}(b_0)$, avem $f(a)=b_0=e_0(0)$ şi $e_0(1)=b_0$. Să arătăm acum că $g_*:[X,F] \longrightarrow [X,L_f]$ este o bijecţie, pentru orice poliedru X. Avem $g_*[\varphi]=[g\varphi]$, pentru $[\varphi] \in [X,F]$. Să arătăm că g_* este surjecţie. Fie $\psi:X \longrightarrow L_f$, $\psi(x)=(a(x),\alpha(x))$, cu $\alpha(x)(0)=f(a(x))$ şi $\alpha(x)(1)=b_0$; $a(x_0)=a_0$, $\alpha(x_0)=e_0$. Considerăm acum diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B \\ {\scriptstyle a'}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle h} \\ X \cup (x_0 \times I) & & X \times I \end{array}$$

unde $a'(x)=a(x)$, $a'(x_0,t)=a_0$, $h(x,t)=\alpha(x)(t)$. Avem atunci $h/X \cup (x_0 \times I) = fa'$. Arătăm că, dacă X este un poliedru, atunci există $k:X \times I \longrightarrow A$, încît $k(x,0)=a(x)$, $k(x_0,t)=a_0$, $f(k(x,t))=h(x,t)$. Fie pentru aceasta, K o triangulare a lui X, încît x_0 este un vîrf al lui K. Pentru $q \geq -1$, notăm $X_q=|K|^q \times 0 \cup (|K|^q \cup x_0) \times I$. Avem $X_{-1}=X \times 0 \cup x_0 \times I$ şi $X_{q-1} \subset X_q$, $q \geq 0$. Prin inducţie, construim $k_q:X_q \longrightarrow A$, încît să fie satisfăcute condiţiile:

(i) $k_{-1}=a'$;

(ii) $k_q/X_{q-1}=k_{q-1}, q\geq 0$;

(iii) $fk_q=h/X_q, q\geq -1$.

Definim atunci aplicaţia $k:X\times I\longrightarrow A$ prin $k/X_q=k_q, q\geq -1$. Condiţia (i) derineşte pe k_{-1}. Presupunem că am construit k_q, pentru $q<n, n\geq 0$. Pentru a construi pe k_n, cu condiţiile (ii) şi (iii) pentru fiecare n-simplex $\sigma\in K$, considerăm aplicaţiile

$a'_\sigma : |\sigma|\times 0 \cup |\dot\sigma|\times I \longrightarrow A$ şi $h_\sigma : |\sigma|\times I \longrightarrow B$,

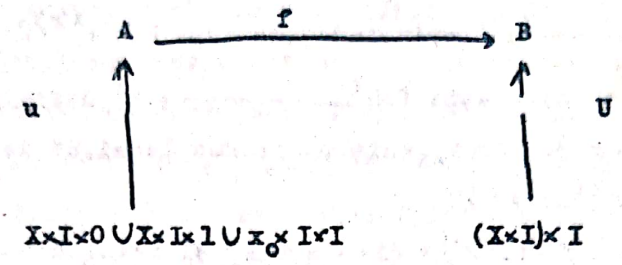
definite prin $a'_\sigma = k_{n-1}/(|\sigma|\times 0)(|\dot\sigma|\times I)$ şi $h_\sigma = h/|\sigma|\times I$.

Perechea $(|\sigma|\times I, |\sigma|\times 0\cup|\dot\sigma|\times I)$ este homeomorfă cu perechea $(|\sigma|\times I, |\sigma|\times 0)$ şi rezultă că există $k_\sigma : |\sigma|\times I\longrightarrow A$ încît $k_\sigma/(|\sigma|\times 0\cup|\dot\sigma|\times I)=a'_\sigma$ şi $fk_\sigma = h_\sigma$. Acum $k_n : X_n\longrightarrow A$ se poate defini prin $k_n/X_{n-1}=k_{n-1}$ şi $k_n/(|\sigma|\times I)=k_\sigma$, pentru orice n-simplex σ.

Definim acum $\varphi : X\longrightarrow A$, prin $\varphi(x)=k(x,1)$. Avem mai întîi $f(k(x,1))=h(x,1)=\alpha(x)(1)=b_0$ şi deci $\varphi : X\longrightarrow F$. Apoi $k(x_0,1)=a_0$, deci φ este aplicaţie cu punct bază, adică $[\varphi]\in[X,F]$. Să arătăm că $g_*[\varphi]=[\psi]$. Avem $(g\varphi)(x)=(\varphi(x),e_0)$. Construim omotopia $H:X\times I\longrightarrow L_f$ prin $H(x,t)=(k(x,t),\beta(x,t))$, unde $\beta(x,t)(t')=\alpha(x)((1-t')t+t')$. Avem atunci $\beta(x,t)(0)=\alpha(x)(t)=h(x,t)=f(k(x,t))$, $\beta(x,t)(1)=\alpha(x)(1)=b_0$, deci $H(x,t)\in L_f$. Apoi $H(x_0,t)=(k(x_0,t),\beta(x_0,t))=(a_0,e_0)$, deci este o omotopie cu puncte bază. În sfîrşit, $H(x,0)=(k(x,0),\beta(x,0))=(a(x),\alpha(x))=\psi(x)$ şi $H(x,1)=(k(x,1),\beta(x,1))=(\varphi(x),e_0)=\varphi(x)$. Prin urmare g_* este surjecţie.

Arătăm că g_* este şi injectivă. Fie $[\varphi_1],[\varphi_2]\in[X,F]$, încît $g_*[\varphi_1]=g_*[\varphi_2]$, adică $g\circ\varphi_1\simeq g\circ\varphi_2$ printr-o omotopie cu puncte bază $h:X\times I\longrightarrow L_f$. Avem deci $h(x,t)=(a(x,t),\alpha(x,t))$, cu $f(a(x,t))=\alpha(x,t)(0)$, $a(x,0)=\varphi_1(x)$, $a(x,1)=\varphi_2(x)$, $a(x_0,t)=b_0$, $\alpha(x,0)=e_0$, $\alpha(x,1)=e_0$, $\alpha(x_0,t)=e_0$.

Considerăm diagrama



cu $u(x,t,0)=a(x,t)$, $u(x,t,1)=a_0$, $u(x_0,t,t')=a_0$ şi $U((x,t),t')=\alpha(x,t)(t')$. Se verifică uşor că U prelungeşte pe fu. Atunci, aplicînd raţionamentul de la surjectivitate, deducem că există $U':(X\times I)\times I \longrightarrow A$, care prelungeşte pe u şi astfel încît $fU'=U$. Definim acum $a':X\times I \longrightarrow A$, prin $a'(x,t)=U'((x,t),1)$. Avem $f(a'(x,t))=U((x,t),1)=\alpha(x,t)(1)=b_0$, deci $a':X\times I \longrightarrow F$. Apoi, $a'(x_0,t)=U'((x_0,t),1)=a_0$, $a'(x,0)=u(x,0)=\varphi_1(x)$ şi $a'(x,1)=u(x,1)=\varphi_2(x)$. Avem astfel $[\varphi_1]=[\varphi_2]$. Am arătat deci că $g_*:[X,F] \longrightarrow [X,L_f]$ este bijecţie. Se aplică acum demonstraţiile din Corolarele 6.5.8 şi 6.5.9 (unde ipoteza este mai tare şi anume că $L_f \simeq F$, dar bijecţia de mai sus este suficientă pentru a înlocui în Teorema 6.4.14 pe $[X,L_f]$ cu $[X,F]$).

6.19. O aplicaţie $f:A \longrightarrow B$ este numită un produs local, cu fibra F, dacă pentru orice punct $b \in B$ există o vecinătate deschisă U a lui b şi un homeomorfism (nu necesar cu punct bază) $h_U:U\times F \longrightarrow f^{-1}(U)$, astfel încît $fh_U(b'\times F)=b'$ pentru $\forall\, b' \in U$. Să se arate că un produs local este o fibrare Serre.

Rezolvare. Fie K un complex simplicial şi fie $g:|K| \longrightarrow A$ şi $H:|K|\times I \longrightarrow B$, încît $H(x,0)=g(x)$, $\forall\, x\in|K|$. Se consideră L o triangulare a intervalului $I=[0,1]$, cu vîrfurile $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1$. Considerăm acoperirea lui B cu mulţimi U ca în definiţia de mai sus. Există atunci $r\geq 0$, astfel încît, pentru orice simplex $6\in K^{(r)}$ şi orice i, avem $H(6\times[t_i,t_{i+1}])\subset U$.

Utilizînd homeomorfismele h_U se poate construi ușor $H: |K^{(r)}| \times I \longrightarrow A$, prin inducție după dim $K^{(r)}$.

6.20. Să se arate că aplicația $f: R^1 \longrightarrow S^1$, definită prin $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$, este un produs local. Să se deducă de aici că $\pi_n(S^1) = 0, n > 1$.

Rezolvare. Avem $f^{-1}(f(x)) = \{x+n / n \in Z\}$ și rezultă imediat că f este un produs local cu fibra Z. După Exercițiul 6.19 este o fibrare Serre și după Exercițiul 6.18, avem șirul exact

$$\ldots \pi_n(Z) \longrightarrow \pi_n(R^1) \longrightarrow \pi_n(S^1) \longrightarrow \pi_{n-1}(Z) \longrightarrow \ldots$$

Pentru $n \geq 2$, avem $\pi_{n-1}(Z) = \pi_n(Z) = 0$ și deci $\pi_n(S^1) \cong \pi_n(R^1) = 0$.

6.21. Fie $f: S^n \longrightarrow RP^n$ aplicația de identificare din Propoziția 1.4.40. Să se arate că f este un produs local și să se deducă de aici că $\pi_r(RP^n) \cong \pi_r(S^n), r > 1$.

Indicație (vezi Exercițiul 7.19).

6.22. O aplicație $f: A \longrightarrow B$ este numită o aplicație de acoperire dacă aceasta este un produs local cu fibra un spațiu discret. Să se arate că $f_*: \pi_n(A) \longrightarrow \pi_n(B)$ este izomorfism pentru $n > 1$ și monomorfism pentru $n = 1$. Să se arate de asemenea că dacă $g: I \longrightarrow B$ este un drum (cu punct bază) în B, există un unic drum (cu punct bază) $h: I \longrightarrow A$, încît $fh = g$.

Rezolvare. Din șirul exact

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(A) \xrightarrow{f_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \ldots \longrightarrow \pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(A) \xrightarrow{f_*} \pi_1(B) \xrightarrow{\partial} \ldots$$

având în vedere că $\pi_n(F) = 0$, pentru $n > 1$, obținem dovada afirmațiilor referitoare la f_*.

Fie acum $g: I \longrightarrow B$, cu $g(0) = b_0$. Putem considera diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ u \uparrow & & \uparrow g' \\ \{pct\} & & pct \times I \end{array}$$

cu $u(pct)=a_0$, $g'(pct.,t)=g(t)$. Există atunci $h':pct.\times I \longrightarrow A$, cu $h(pct.,0)=a_0$ și $fh'=g'$. Atunci $h:I \longrightarrow A$, $h(t)=h'(pct.,t)$ este un drum cu punct bază și $fh=g$.

Pentru unicitate, stabilim rezultatul următor mai general: dacă X este spațiu conex (cu punct bază) și $\varphi_1, \varphi_2 : X \longrightarrow A$ sînt aplicații cu punct bază, încît $f\varphi_1 = f\varphi_2$, atunci $\varphi_1 = \varphi_2$.

Fie $X_1 = \{x \in X / \varphi_1(x) = \varphi_2(x)\}$. Atunci $X_1 \neq \phi$. Arătăm că X_1 este deschisă. Fie $x \in X_1$ și fie U o vecinătate a lui $f\varphi_1(x) = f\varphi_2(x)$, încît există un homeomorfism $h_U : U \times F \longrightarrow f^{-1}(U)$. Există atunci $\tilde{U} \subset f^{-1}(U)$ încît $f/\tilde{U} : \tilde{U} \longrightarrow U$ este un homeomorfism. Avem că $\varphi_1^{-1}(\tilde{U}) \cap \varphi_2^{-1}(\tilde{U})$ este deschisă în X, conține x și este inclusă în X_1, cum se verifică imediat. Deci X_1 este deschisă. Fie acum $X_2 = \{x \in X / \varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)\}$. Arătăm că și X_2 este deschisă. Fie $x \in X_2$ și fie U o vecinătate ca mai sus pentru $f(\varphi_1(x))$. Deoarece $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in f^{-1}(U)$, dar $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$, există $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2 \subset f^{-1}(U)$, încît $\varphi_1(x) \in \tilde{U}_1$, $\varphi_2(x) \in \tilde{U}_2$, $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \phi$ și $f/\tilde{U}_1 : \tilde{U}_1 \longrightarrow U$, $f/\tilde{U}_2 : \tilde{U}_2 \longrightarrow U$ sînt homeomorfisme. Atunci $\varphi_1^{-1}(\tilde{U}_1) \cap \varphi_2^{-1}(\tilde{U}_2)$ este deschisă în X, conține pe x și este inclusă în X_2. Deci X_2 este deschisă. Avînd în vedere că X este spațiu conex, $X = X_1 \cup X_2$ X_1, X_2 deschise și $X_1 \neq \phi$, rezultă $X_1 = X$.

6.23. Fie $f:A \longrightarrow B$ o aplicație de acoperire și fie X un spațiu liniar conex și local liniar conex (X se zice local liniar conex dacă, pentru orice punct $x \in X$ și orice deschisă U care conține x există o deschisă V, încît $x \in V \subset U$ și oricare două puncte din V pot fi unite cu un drum în U). Să se arate că, dacă $g:X \longrightarrow B$ este o aplicație încît $g_* \pi_1(X) \subseteq f_* \pi_1(A)$, atunci există o unică aplicație $h:X \longrightarrow A$ încît $fh=g$.

Rezolvare. Unicitatea aplicației h a fost dovedită în rezolvarea exercițiului precedent. Pentru a dovedi existența vom parcurge cîteva rezultate preliminarii.

(A). Dacă x_0 este o retractă tare de deformare a lui X, atunci există $h:X \longrightarrow A$ (cu punct bază, $h(x_0)=a_0$), cu $fh=g$.

Avem $g \simeq e_{b_0}$, printr-o omotopie cu punct bază $H: X \times I \longrightarrow B$. Procedînd ca în rezolvarea Exercițiului 6.18, deducem că există $k: X \times I \longrightarrow A$, încît $k(x,0)=a_0$, $k(x_0,t)=a_0$, $fk=H$. Definim atunci $f_1: X \longrightarrow A$, prin $f_1(x)=k(x,1)$ *).

(B). Spațiul LX are punctul bază e_{x_0} ca retractă tare de deformare prin $h: LX \times I \longrightarrow LX$, cu $h(\alpha,t)(t')=\alpha((1-t)t')$.

(C). Aplicația $p: LX \longrightarrow X$, $p(\alpha)=\alpha(1)$ este o aplicație deschisă. Fie $\alpha \in LX$ și $W=\bigcup_{1 \le i \le n} W_{K_i,D_i}$ o vecinătate a lui α, unde K_i sînt compacte în I, iar D_i deschise în X. Putem presupune (eventual schimbînd numerotarea) că $1 \in K_1 \cap \ldots \cap K_m$ și $1 \bar{\in} (K_{m+1} \cup \ldots \cup K_n)$. Deoarece $\alpha(1) \in D_1 \cap \ldots \cap D_m$, există o vecinătate liniar conexă V a lui $\alpha(1)$, încît $V \subset D_1 \cap \ldots \cap D_m$. Alegem $0<t_0<1$ astfel încît $[t_0,1] \cap (K_{m+1} \cup \ldots \cup K_n) = \phi$ și $\alpha([t_0,1]) \subset V$. Fie $x \in V$ și α' un drum în V de la $\alpha(t_0)$ la x. Definim atunci drumul $\theta: I \longrightarrow X$, prin

$$\theta(t) = \begin{cases} \alpha(t), & 0 \le t \le t_0 \\ \alpha'\left(\frac{t-t_0}{1-t_0}\right), & t_0 \le t \le 1 \end{cases}$$

Dacă $i > m$, atunci $\theta(K_i) = \alpha(K_i) \subset D_i$. Pentru $i \le m$, $\theta(K_i) = \theta(K_i \cap [0,t_0]) \cup \theta(K_i \cap [t_0,1]) \subset \alpha(K_i) \cup \alpha(I) \subset D_i \cup V = D_i$. Deci în fiecare caz, $\theta(K_i) \subset D_i$. Rezultă că $\theta \in W$ și $p(\theta) = x$. Așadar, $V \subset p(W)$, adică $p(W)$ este deschisă, deci p este aplicație deschisă.

(D). Dacă X este un spațiu liniar conex și local liniar conex și $\varphi: LX \longrightarrow Y$, este o aplicație cu punct bază, cu proprietatea că dacă $\alpha, \alpha' \in LX$, cu $\alpha(1)=\alpha'(1)$, atunci $\varphi(\alpha)=\varphi(\alpha')$, atunci există o aplicație continuă $\psi: X \longrightarrow Y$, cu punct bază, încît $\varphi = \psi p$. Deoarece X este liniar conex, aplicația $p: LX \longrightarrow X$ este surjectivă. Apoi, dacă $x \in X$, fie α un drum de la x_0 la x. Definim aplicația $\psi: X \longrightarrow Y$ prin $\psi(x)=\varphi(\alpha)$. Aceasta este bine definită, în baza ipotezei asupra funcției φ.

*) Punctul bază pentru I, aici, este 0.

Avem apoi $\varphi = \psi p$. In sfîrşit, ψ este continuă deoarece φ este continuă şi p este deschisă.

Să presupunem acum că avem $g:X \longrightarrow B$, încît $g_* \pi_1(X) \subset f_* \pi_1(A)$. Considerăm aplicaţia $LX \xrightarrow{p} X \xrightarrow{g} B$. Atunci după (A) şi (B), există $g':LX \longrightarrow A$, astfel încît $fg' = gp$. Fie acum $\alpha, \alpha' \in LX$, cu $\alpha(1) = \alpha'(1)$, adică $p(\alpha) = p(\alpha')$. Să arătăm că $g'(\alpha) = g'(\alpha')$. Definim drumurile punctate în LX prin $\bar{\alpha}(t)\ (t') = \alpha(tt')$ şi $\bar{\alpha}'(t)\ (t') = \alpha'(tt')$. Avem atunci $fg'\bar{\alpha} = gp\bar{\alpha} = g\alpha$ şi analog $fg'\bar{\alpha}' = g\alpha'$. Dar $[\alpha * \alpha'^{-1}] \in \pi_1(X, x_0)$ şi în baza ipotezei, există $[\tilde{\alpha}] \in \pi_1(A, a_0)$, încît $g_*[\tilde{\alpha} * \alpha'^{-1}] = f_*[\tilde{\alpha}]$, adică $g\alpha * (g\alpha')^{-1} \simeq f\tilde{\alpha}$ rel $\dot{I}$. Avem atunci $fg'\bar{\alpha} = g\alpha \simeq f\tilde{\alpha} * g\bar{\alpha}' = f(\tilde{\alpha} * (g'\bar{\alpha}'))$ rel $\dot{I}$. Vom arăta că aceasta implică $g'\bar{\alpha} \simeq \tilde{\alpha} * (g'\bar{\alpha}')$ rel $\dot{I}$. Dacă vom avea aceasta, va rezulta că $(g'\bar{\alpha})(1) = (g'\bar{\alpha}')(1)$, ceea ce înseamnă că avem $g'(\alpha) = g'(\alpha')$. Aplicînd atunci (D), pentru aplicaţia $g':LX \longrightarrow A$, rezultă că există $h:X \longrightarrow A$, încît $hp = g'$, de unde obţinem $fhp = fg' = gp$ şi cum p este surjectivă, rezultă $fh = g$.

Aşadar, a rămas să demonstrăm următoarea afirmaţie:

(E). Dacă $\alpha, \alpha' \in LA$ şi $f\alpha \simeq f\alpha'$ rel $\dot{I}$, atunci $\alpha \simeq \alpha'$ rel $\dot{I}$.

Fie $F:I \times I \longrightarrow B$, cu $F(t,0) = f\alpha(t)$, $F(t,1) = f\alpha'(t)$, $F(0,t') = b_0$ şi $F(1,t') = f\alpha(1) = f\alpha'(1)$. Există $G:I \times I \longrightarrow A$, încît $G(t,0) = \alpha(t)$ şi $fG = F$. Atunci $G(\{0\} \times I) \subset f^{-1}(b_0)$ şi $G(\{1\} \times I) \subset f^{-1}(f(\alpha(1))$. Fibra fiind spaţiu discret, obţinem $G(0,t') = G(0,0)$ şi $G(1,t') = G(1,0)$. Notăm $\alpha''(t) = G(t,1)$, avem $\alpha''(0) = \alpha(0) = a_0$, $\alpha'' \simeq \alpha$ rel $\dot{I}$, $f\alpha'' = f\alpha'$. După Exerciţiul 6.22, avem $\alpha' = \alpha''$ şi din $\alpha'' \simeq \alpha$ rel $\dot{I}$, deducem $\alpha' \simeq \alpha$ rel $\dot{I}$.

6.24. Fie $f:A \longrightarrow B$ şi $f':A' \longrightarrow B$ două aplicaţii de acoperire astfel încît $f_* \pi_1(A) = f'_* \pi_1(A')$ şi presupunem că A şi A' sînt liniar conexe şi local liniar conexe. Să se arate că A şi A' sînt homeomorfe.

Rezolvare. Din 6.23, există $h:A \longrightarrow A'$ şi $k:A' \longrightarrow A$

astfel încît $fh=f'$ şi $f'k=f$. Prin urmare $f'kh=f'$ şi $fhk=f$ şi în baza unicităţii din 6.23, rezultă $kh=Id$ şi $hk=Id$.

6.25. Fie B un spaţiu liniar conex, local liniar conex şi care este de asemenea slab local simplu-conex (adică, pentru orice punct $x \in B$ şi orice mulţime deschisă U, conţinînd x, există o mulţime deschisă V, încît $x \in V \subset U$ şi fiecare loop în V în punctul x este contractibil în B). Fie G un subgrup al lui $\pi_1(B)$. Să se arate că există un spaţiu A şi o aplicaţie de acoperire $f: A \longrightarrow B$, astfel încît $f_*\pi_1(A)=G$. Să se arate că A este determinat pînă la homeomorfisme prin B şi G; astfel, în particular, există în mod esenţial un singur asemenea spaţiu A dacă $G=0$; în acest caz $\pi_1(A)=0$ şi A este numit acoperirea universală a lui B.

Rezolvare. Considerăm spaţiul LB.*) Considerăm pe acesta relaţia de echivalenţă $\alpha R \beta \Leftrightarrow \alpha(1)=\beta(1)$ şi $[\alpha \circ \beta^{-1}] \in G$. Să notăm cu A mulţimea claselor de echivalenţă, obţinute astfel şi fie $<\alpha>$ clasa corespunzătoare drumului $\alpha \in LB$. Fie de asemenea aplicaţia

$$f: A \longrightarrow B, f(<\alpha>)=\alpha(1).$$

Aceasta este bine definită. Vom dota A cu o topologie în raport cu care f este continuă. Fie pentru aceasta U deschisă în B şi $\alpha \in LB$, încît $\alpha(1) \in U$. Considerăm mulţimea $<\alpha, U>=\{\alpha \circ \alpha' / \alpha(1)=\alpha'(0), \alpha'(I) \subset U\}$, unde $\mathcal{U}=\{U\}$ este acoperirea lui B formată din mulţimile deschise. Se poate arăta că $\{<\alpha, U> / U \in \mathcal{U}, \alpha(1) \in U, \alpha \in LB\}$ constituie o bază de topologie pe mulţimea A. In raport cu această topologie, f este continuă. In adevăr, dacă $U \in \mathcal{U}$, atunci $f^{-1}(U) \supset <\alpha, U>$, unde $<\alpha> \in f^{-1}(U$. Deci, $f^{-1}(U)$ este deschisă. Aplicaţia f este şi deschisă, deoarece $f(<\alpha, U>)$ este componenta liniar conexă a mulţimii U care conţine punctul $\alpha(1)$ şi deoarece B este local liniar conex, această componentă este deschisă (vezi Exerciţiul 1.11). Pentru o deschisă U, considerăm, avînd în vedere punctul $x \in U$, mulţimea V deschisă şi liniar conexă, încît $x \in V \subset U$ şi cu proprietatea că orice loop în x este contractibil în B. Dacă $<\alpha> \in f^{-1}(V)$, atunci $<\alpha, V> \subset f^{-1}(V)$ şi

*) Aici, $LB = \{\alpha : I \longrightarrow B / \alpha(0)=b_0\}$

avem $f^{-1}(V) = \bigcup_{<\alpha>\in f^{-1}(V)} <\alpha, V>$. Mulțimile $<\alpha, V>$ sînt deschise. Fie acum $<\alpha''> \in <\alpha, V> \cap <\alpha', V>$. Atunci $<\alpha'', V> = <\alpha, V>$ și $<\alpha'', V> = <\alpha', V>$, adică $<\alpha, V> = <\alpha', V>$. Deci submulțimile $<\alpha, V>$ sînt disjuncte. Să arătăm că $f/<\alpha, V> : <\alpha, V> \longrightarrow V$ este o bijecție. Cum f este aplicație continuă și deschisă, va rezulta că $f/<\alpha, V>$ este un homeomorfism. Fie $b \in V$ și α' un drum în V de la $\alpha(1)$ la b. Atunci, $<\alpha \circ \alpha'> \in <\alpha, V>$ și $f(<\alpha \circ \alpha'>) = b$, de unde rezultă că $f/<\alpha, V>$ este surjectivă. Fie acum $f(<\alpha \circ \alpha_1>) = f(<\alpha \circ \alpha_2>)$. Atunci $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$ și deci $[(\alpha \circ \alpha_1) \circ (\alpha \circ \alpha_2)^{-1}] \in \pi_1(B, b_0)$. Avem însă $[(\alpha \circ \alpha_1) \circ (\alpha \circ \alpha_2)^{-1}] = [\alpha \circ (\alpha_1 \circ \alpha_2^{-1}) \circ \alpha^{-1}]$. Dar cu $\alpha_1 \circ \alpha_2^{-1}$ este un drum în V, rezultă că $[(\alpha \circ \alpha_1) \circ (\alpha \circ \alpha_2)]^{-1} = 0 \in G$ și prin urmare, $(\alpha \circ \alpha_1) R (\alpha \circ \alpha_2)$, adică $<\alpha \circ \alpha_1> = <\alpha \circ \alpha_2>$. Prin urmare $p/<\alpha, V>$ este și injectivă. Este clar că $f^{-1}(V)$ și $V \times f^{-1}(b_0)$ au același cardinal. Deci f este o aplicație de acoperire, cu fibra $f^{-1}(b_0)$. Fie acum $a_0 = <e_{b_0}>$. Avem $f : (A, a_0) \longrightarrow (B, b_0)$. Să arătăm că $f_* \pi_1(A, a_0) = G$. Fie $\alpha \in LB$. Pentru orice $t \in I$, definim $\alpha_t \in LB$, prin $\alpha_t(t') = \alpha(tt')$ și $\tilde{\alpha} : I \longrightarrow A$, prin $\tilde{\alpha}(t) = <\alpha_t>$. Să arătăm că $\tilde{\alpha}$ este un drum în A, deci că aplicația $\tilde{\alpha}$ este continuă. Dacă $\tilde{\alpha}(t_0) \in <\alpha', U>$, atunci $f\tilde{\alpha}(t_0) = \alpha(t_0) \in U$ și $<\alpha', U> = <\tilde{\alpha}(t_0), U>$. Fie J un interval deschis din I, cu $t_0 \in J$ și $\alpha(J) \subset U$. Dacă $t \in J$, atunci $\alpha_t R (\alpha_{t_0} * \alpha_{t_0, t})$, unde $\alpha_{t_0, t}(t') = \alpha(t_0 + t'(t - t_0))$. Deci, pentru $t \in J$, $\tilde{\alpha}(t) = <\alpha_t> = <\tilde{\alpha}(t_0) * \alpha_{t_0, t}> \in <\tilde{\alpha}(t_0), U> = <\alpha', U>$, care arată că $\tilde{\alpha}$ este aplicație continuă. Avem apoi $f\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}_t(1) = \alpha(t)$, $\tilde{\alpha}(0) = a_0$ și $\tilde{\alpha}(1) = <\alpha>$. Dacă $[\alpha] \in G$, atunci $\alpha R e_{b_0}$ și $<\alpha> = a_0$. În consecință, $\tilde{\alpha}$ este un loop în a_0 și $f_*[\tilde{\alpha}] = [\alpha]$, prin urmare $G \subseteq f_* \pi_1(A, a_0)$. Pe de altă parte, dacă $\tilde{\alpha}'$ este un loop în A, încît $f\tilde{\alpha}' = \alpha$, atunci fie $\tilde{\alpha}$ ridicarea sa considerată mai sus. Din 6.22, rezultă că $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}'$ și deci $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}'(1) = a_0$. Deoarece $\tilde{\alpha}(1) = <\alpha>$, rezultă $\alpha R e_{b_0}$ și prin urmare

$f_* \pi_1(A, a_0) \subseteq G$. Unicitatea, pînă la homeomorfisme, a lui A rezultă din Exercițiul 6.24.

C

1). Una din proprietățile importante ale aplicațiilor de acoperire este aceea de a fi homeomorfisme locale (vezi utilizarea în Exercițiul 7.15.
Fie $f: A \longrightarrow B$ o aplicație de acoperire (Exercițiul 6.22)
Fie $a \in A$ și U o vecinătate a lui $f(a)$ astfel încît $f^{-1}(U) = \bigcup \tilde{U}$, cu $\tilde{U}$ deschise și disjuncte. Fie $\tilde{U}_0$ încît $a \in \tilde{U}_0$.
Atunci $f/\tilde{U}_0 : \tilde{U}_0 \longrightarrow U$ este un homeomorfism.

2). Teorema de clasificare a spațiilor de acoperire din Exercițiul 6.25 se poate enunța în condiții mai generale, renunțînd la proprietatea de slab local simplu conex. Se impune în schimb să existe o acoperire deschisă $\mathcal{U}$ a lui B încît $\pi(\mathcal{U}) \subset G$.
Pentru definiția grupului $\pi(\mathcal{U})$ și enunțul și demonstrația teoremei corespunzătoare, se poate consulta, de exemplu, R. Miron & I. Pop, Topologie algebrică. Omologie, Omotopie, Spații de acoperire, Ed. Acad. RSR, 1974, § 5, Cap. X, p. 301.

3). In Exercițiul 6.19 se arată că orice produs local este o fibrare Serre. Se poate însă arăta că dacă B este un spațiu Hausdorff paracompact, atunci produsul local $f: A \longrightarrow B$ este chiar o fibrare Hurewicz, adică are proprietatea de ridicare a omotopiei în raport cu orice spațiu (Definiția 6.5.6).
Pentru demonstrația acestei afirmații se poate consulta, de exemplu E. H. Spanier, Algebraic Topology, Mir, 1971, § 7, Cap. II, Corolarul 14, p. 129.
L. S. Husch, în "Hurewicz fibrations need not be locally trivial", Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 61, No. 1, 1976, p. 155-156, a dat un exemplu de fibrare Hurewicz $p: M \longrightarrow S^1$, de la o varietate închisă pe o 1-sferă care nu este un produs local.
Mai multe proprietăți și generalizări ale acestor chestiuni sînt date de C. Teleman în "Connections and Bundles I, II", Konikl. Nederl. Akademie Van Wetenschappen-Amsterdam, Series A, 72, No. 1 and Indg. Math., 31, No. 1, 1969, p. 89-112.

4). Spațiul topologic A din Exercițiul 6.25 coincide cu spațiul cît LB/R și aplicația $LB \longrightarrow LB/R$ este deschisă.
Construcția poate fi generalizată pentru a obține fibrări Hurewicz [I. Pop, Some remarks on the path fibration of a topological space, Bul. Inst. polit. Iași, Tom XXV, Fasc. 3-4, 1979]

5). Fibrările Serre (Exercițiul 6.18) fiind numite și fibrări slabe (vezi de exemplu E.H.Spanier, Algebraic Topology, Mir, 1971, p.482).

Din Exercițiul 6.18 se pot deduce și următoarele proprietăți:

(a) Dacă incluziunea $i: F=f^{-1}(b_0) \longrightarrow A$ induce homomorfismul nul $i_*: \pi_n(F) \longrightarrow \pi_n(A)$, atunci

$\pi_n(B) \cong \pi_n(A) \oplus \pi_{n-1}(F)$, $n \geq 2$

(b) Dacă fibrarea Serre $f: A \longrightarrow B$ are o secțiune $s: B \longrightarrow A$, adică $fs = 1_B$, atunci

$\pi_n(A) \cong \pi_n(B) \oplus \pi_n(F)$, $n \geq 2$

6). Noțiunea de fibrare Serre este generalizată de aceea de cvasifibrare (vezi de exemplu J.Stasheff, A classification theorem for fibre spaces, Topology, vol.2 (1963), pp239-246, sau Ioan Pop, Teoreme de clasificare pentru fibrări și cvasi-fibrări, Studii și Cercetări matematice, nr.3, Tom 22 (1970), pp.459-522).

O aplicație continuă $f: A \longrightarrow B$ este o cvasifibrare dacă $f_*: \pi_n(A, f^{-1}(b), a) \cong \pi_n(B, b)$, $\forall\, n \geq 1$, $\forall\, b \in B$, $\forall\, a \in f^{-1}(b)$.

Pentru o cvasi-fibrare are loc șirul exact de omotopie din Exercițiul 6.18. Orice fibrare Serre este o cvasi-fibrare.

Următorul exemplu arată că reciproc nu este adevărat: Fie A constînd din cele două discuri din Fig. 36 și din segmentul de tangentă MN, iar B să fie segmentul ab.

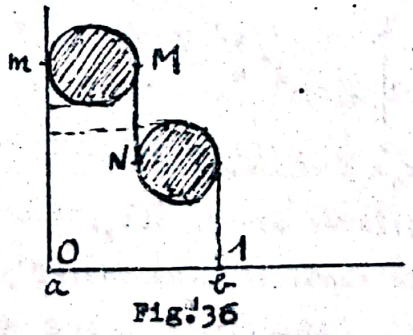


Fig. 36

Aplicația $f: A \longrightarrow B$ proiecția ortogonală. Deoarece A și B sînt contractibile, rezultă imediat că f este o cvasi-fibrare. Nu este însă o fibrare Serre, deoarece dacă considerăm $u: \{0\} \longrightarrow A$, $u(0)=m$, $F: \{0\} \times I \longrightarrow B$, $F(0,t)=t$, avem $F(0,0)=fu(0)$, dar nu există $F': \{0\} \times I \longrightarrow A$, încît $F'(0,0)=m$ și $fF'=F=Id$. Deci f nu are proprietatea de ridicare a omotopiei în raport cu poliedrele. Nu este deci o fibrare Serre.

Capitolul 7. GRUPURI DE OMOTOPIE SI CW-COMPLEXE.

7.1. Fie X,Y două spaţii liniar conexe cu puncte bază x_0, y_0 şi presupunem că (X,x_0) are proprietatea de extensie absolută a omotopiei. Să se arate că un drum u în Y de la y_0 la y_1 induce o corespondenţă bijectivă $u_\# : [X,Y]_0 \longrightarrow [X,Y]_1$ (unde $[X,Y]_i$ notează $[X,Y]$ cu punctele bază x_0 şi respectiv y_i), cu următoarele proprietăţi:

(a) Dacă $u \simeq v$ rel $\{0,1\}$, atunci $u_\# = v_\#$.

(b) $(e_{y_0})_\#$ este funcţia identitate.

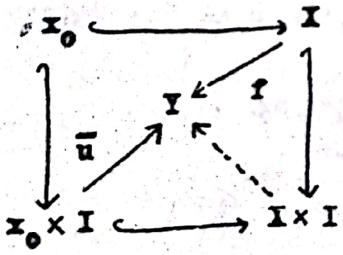
(c) Dacă w este un drum de la y_1 la y_2, atunci $(u.w)_\# = w_\# u_\#$.

(d) Dacă $f: Y \longrightarrow Z$ este o aplicaţie încît $f(y_0)=z_0$ şi $f(y_1)=z_1$, atunci $f_* u_\# = (fu)_\# f_* : [X,Y]_0 \longrightarrow [X,Z]_1$.

(e) Dacă X este AH'I, atunci $u_\#$ este un izomorfism.

Să se arate că dacă f în (d) este o echivalenţă omotopică (ca aplicaţie fără punct bază), atunci $f_* : [X,Y]_0 \longrightarrow [X,Z]_0$ este o corespondenţă bijectivă.

Rezolvare. Fie $f:(X,x_0) \longrightarrow (Y,y_0)$ şi considerăm diagrama



unde $\bar{u}(x_0,t)=u(t)$. Avem atunci $\bar{u}(x_0,0)=u(0)=y_0=f(x_0)$. Din proprietatea de extensie absolută a omotopiei pentru (X,x_0), rezultă că există $F: X \times I \longrightarrow Y$, cu $F(x_0,t)=\bar{u}(x_0,t)=u(t)$ şi $F(x,0)=f(x)$. Fie $f': X \longrightarrow Y$ definită prin $f'(x)=F(x,1)$. Atunci $f'(x_0)=F(x_0,1)=u(1)=y_1$, deci $f':(X,x_0) \longrightarrow (Y,y_1)$. Vom dovedi că este bine definită aplicaţia $u_\#$ prin $u_\#([f]) = [f']$, şi dovedim în acelaşi timp

(a) Fie $v: I \longrightarrow Y$ un alt drum de la y_0 la y_1, $T: g \simeq f$ şi fie $G: X \times I \longrightarrow Y$, cu $G(x_0,t)=v(t)$ şi $G(x,0)=g(x)$.

Fie $g':(X,x_0) \longrightarrow (Y,y_1)$ definită prin $g'(x)=G(x,1)$.
Avem de arătat că $f' \simeq g'$ printr-o omotopie rel x_0, dacă $u \simeq v$ rel $\{0,1\}$.
Avem o omotopie $L:(u^{-1}.e_{x_0}).v \simeq e_{y_1}$ rel $\{0,1\}$ și de asemenea există
$H:f' \simeq g'$ definită prin

$$H(x,t)=\begin{cases} F(x,1-4t), & t\in[0,1/4] \\ T(x,2-4t), & t\in[1/4,1/2] \\ G(x,2t-1), & t\in[1/2,1] \end{cases}$$

Avem $H(x_0,t)=[(u^{-1}.e_{x_0}).v](t)$.

Definim $K:(X\times 0 \cup x_0 \times I \cup X \times 1)\times I \longrightarrow Y$ prin
$K(x,0,s)=H(x,0)$, $K(x_0,t,s)=L(t,s)$ și $K(x,1,s)=H(x,1)$. Deoarece (X,x_0)
are proprietatea de extensie absolută a omotopiei, există
$K':(X\times I)\times I \longrightarrow Y$, cu $K'(x,t,0)=H(x,t)$, $K'(x,0,s)=H(x,0)$,
$K'(x_0,t,s)=L(t,s)$ și $K'(x,1,s)=H(x,1)$.
Definim acum $H':X\times I \longrightarrow Y$ prin $H'(x,t)=K'((x,t),1)$.
Avem atunci $H'(x,0)=H(x,0)=f'(x)$, $H'(x,1)=H(x,1)=g'(x)$, $H'(x_0,t)=$
$=L(t,1)=y_1$, deci $[f']=[g]$ în $[X,Y]_1$. Rezultă că avem și $u_\#=v_\#$.
(b) rezultă imediat din definiția lui $u_\#$ dacă $f:(X,x_0)\longrightarrow(Y,y_0)$
se poate lua $F(x,t)=f(x)$, pentru care avem $F(x_0,t)=f(x_0)=y_0=e_{y_0}(t)$ și
$F(x,0)=f(x)$. Atunci $f'(x)=F(x,1)=f(x)$. Deci $(e_{y_0})_\#[f]=[f']=[f]$.
(c) Fie $F:X\times I \longrightarrow Y$, cu $F(x_0,t)=u(t)$ și $F(x,0)=f(x)$, pentru
$[f]\in[X,Y]_0$. Fie $u_\#[f]=[f']$, cu $f'(x)=F(x,1)$. Dacă $G:X\times I \longrightarrow Y$, cu
$G(x_0,t)=w(t)$ și $G(x,0)=f'(x)$, atunci $w_\#(u_\#[f])=[f'']$, pentru $f''(x)=$
$=G(x,1)$. Luăm acum $H:X\times I \longrightarrow Y$ definită prin

$$H(x,t)=\begin{cases} F(x,2t), & t\in[0,1/2] \\ G(x,2t-1), & t\in[1/2,1] \end{cases}$$

Avem atunci $H(x_0,t)=(u.w)(t)$ și $H(x,0)=f(x)$. Prin urmare:
$(u.w)_\#([f])=[f'']=w_\#(u_\#[f])$.
(d) Dacă $\varphi:(X,x_0)\longrightarrow(Y,y_0)$, fie $u_\#[\varphi]=[\varphi']$, pentru
$F:X\times I \longrightarrow Y$, cu $F(x_0,t)=u(t)$, $F(x,0)=\varphi(x)$ și $F(x,1)=\varphi'(x)$.
Atunci: $f_\# u_\#[\varphi]=[f\varphi']$. Pe de altă parte, $f_\#[\varphi]=[f\varphi]$ și putem

lua $G: X \times I \longrightarrow Z$, cu $G(x,t)=f(F(x,t))$. Avem atunci $G(x_0,t)=f(F(x_0,t))=(fu)(t)$ şi $G(x,0)=f(F(x,0))=(f\varphi)(x)$. Rezultă că $(fu)_\# [f\varphi]=[f\varphi]=f_\# u_\# [\varphi]$.

(e) Avem de arătat că dacă X este un AH'I, atunci $u_\#$ este un homomorfism.

Fie $\mu: X \longrightarrow X \vee X$ comultiplicarea pe X şi fie $[f_1], [f_2] \in [X,Y]_0$. Atunci $[f_1][f_2]=[f_1 . f_2]$, unde $f_1 . f_2 = \nabla (f_1 \vee f_2)\mu$. Fie $u_\# [f_1]=[f_1']$, $u_\# [f_2]=[f_2']$, definite cu $F: X \times I \longrightarrow Y$, $G: X \times I \longrightarrow Y$, satisfăcînd $F(x,0)=f_1(x)$, $F(x_0,t)=u(t)$, $F(x,1)=f_1'(x)$; $G(x,0)=f_2(x)$, $G(x_0,t)=u(t)$, $G(x,1)=f_2'(x)$. Avem de asemenea $[f_1'][f_2']=[f_1' . f_2']$, cu $f_1' . f_2' = \nabla (f_1' \vee f_2')\mu$. Construim o omotopie $H: f_1 . f_2 = \nabla (f_1 \vee f_2)\mu \simeq \nabla (f_1' \vee f_2')\mu = f_1' . f_2'$, anume:

$H = \nabla (F \vee G)\bar{\mu}$, unde $\bar{\mu}$ este comultiplicarea indusă pe $X \times I$

$\bar{\mu}: X \times I \xrightarrow{\mu \times 1} (X \vee X) \times I \xrightarrow{\bar{g}} (X \times I) \vee (X \times I)$, unde $\bar{g}$ este un homeomorfism. Cu alte cuvinte: $H(x,t) = \nabla (F_t \vee G_t)\mu(x)$.

Avem atunci: $H(x,0)=(\nabla (F_0 \vee G_0)\mu)(x) = \nabla (f_1 \vee f_2)\mu(x) = (f_1 . f_2)(x)$

$H(x,1)=(\nabla (F_1 \vee G_1)\mu)(x) = \nabla (f_1' \vee f_2')\mu(x) = (f_1' . f_2')(x)$ şi

$H(x_0,t)=(\nabla (F_t \vee G_t)\mu)(x_0) = \nabla (F_t \vee G_t)(x_0,x_0) = F(x_0,t)=G(x_0,t)=u(t)$. Rezultă prin urmare că avem $u_\# [f_1 . f_2]=[f_1' . f_2']$.

Pentru a dovedi ultima afirmaţie, vom stabili mai întîi următorul rezultat:

(f) Dacă $f, g: Y \longrightarrow Z$ sînt două aplicaţii omotope (ca aplicaţii fără punct bază) şi dacă $f(y_0)=z_0$, $g(y_0)=z_1$, atunci există un drum în Z, de la z_0 la z_1, $u: I \longrightarrow Z$, astfel încît $u_\# f_\# = g_\#$.

In adevăr:

Fie $h: Y \times I \longrightarrow Z$, cu $h(y,0)=f(y)$, $h(y,1)=g(y)$. Vom lua $u(t)=h(y_0,t)$. Atunci, pentru $[\varphi] \in [X,Y]_0$, avem $u_\# f_\# [\varphi] = u_\# [f\varphi]$. Putem considera omotopia $F=h(\varphi \times 1): X \times I \longrightarrow Y \times I \longrightarrow Z$.

Avem atunci : $F(x,0)=h(\varphi(x),0)=(f\varphi)(x)$,
$F(x_0,t)=h(\varphi(x_0),t)=h(y_0,t)=u(t)$ şi $F(x,1)=h(\varphi(x),1)=g(\varphi(x))$.
Prin urmare: $u_\#[f\varphi]=[g\varphi]$, adică $u_\# f_* = g_*$.
Să presupunem acum că în (d) aplicaţia $f:Y \longrightarrow Z$, cu $f(y_0)=z_0$ este o echivalenţă omotopică. Fie $g:Z \longrightarrow Y$ inversa omotopă a lui f, cu $g(z_0)=y_1$. Putem considera atunci aplicaţiile $gf:(Y,y_0)\longrightarrow(Y,y_1)$, $1_Y:(Y,y_0)\longrightarrow(Y,y_0)$. După (f) există un drum u în Y, de la y_0 la y_1, astfel încît $u_\#(1_Y)_* = (gf)_* = g_* f_*$. Deoarece $u_\#$ este bijecţie, rezultă că f_* este aplicaţie injectivă şi g_* surjectivă. Schimbînd, într-un mod evident, rolurile aplicaţiilor f şi g, deducem că f_* este şi surjectivă.

7.2. Fie $\mathcal{N}_n(X)$ subgrupul lui $\pi_n(X)$ generat de toate elementele de forma $x-u_\# x$, unde $[u]\in\pi_1(X)$ (dacă n=1, acesta este interpretat ca $x\cdot(u_\# x)^{-1}$). Să se arate că:
(a) $\mathcal{N}_n(X)$ este un subgrup normal al grupului $\pi_n(X)$;
(b) Dacă X este liniar conex şi $\pi_n^*(X)$ notează grupul factor $\pi_n(X)/\mathcal{N}_n(X)$, atunci o clasă de omotopie (fără punct bază) de aplicaţii $f:S^n\longrightarrow X$ defineşte un unic element al grupului $\pi_n^*(X)$;
(c) Orice aplicaţie $g:X\longrightarrow Y$ între spaţii liniar conexe induce un homomorfism $g_*:\pi_n^*(X)\longrightarrow\pi_n^*(Y)$.

Rezolvare.
(a) Pentru $n>1$, grupul $\pi_n(X)$ fiind abelian, afirmaţia este evidentă. Pentru n=1, un generator al grupului $\pi_1(X)$ este de forma $x(u_\# x)^{-1}=x(u^{-1}xu)^{-1}=xu^{-1}x^{-1}u$ şi deci $\mathcal{N}_1(X)$ este subgrupul comutatorilor lui $\pi_1(X)$, care este subgrup normal.
(b) In (a) am avut în vedere un punct $x_0\in X$ şi am considerat $\pi_n(X,x_0)=\pi_n(X)$ şi corespunzător, notaţia $\pi_n^*(X)$ pentru $\pi_n^*(X,x_0)$. Vom arăta însă că de fapt între grupurile $\pi_n^*(X,x_0)$ şi

$\pi_n^*(X,x_1)$ sînt canonic izomorfe.

Fie u un drum în X de la x_0 la x_1. Putem considera atunci homomorfismul $u_\# : \pi_n(X,x_0) \longrightarrow \pi_n(X,x_1)$ (Teorema 7.2.3). Dacă $x-v_\#(x) \in \pi_n(X,x_0)$ este un generator al grupului $\Omega_n(X,x_0)$, atunci $u_\#(x-v_\# x)=u_\# x - u_\# v_\# x = u_\#(x)-(vu)_\#(x)=u_\#(x)-w_\#(u_\#(x))=$ $=u_\#(x)-(uw)_\#(x)$, pentru $w=u^{-1}vu$, adică $w=u_\#(v)$. Rezultă aşadar că $u_\#(x-v_\# x) \in \Omega_n(X,x_1)$. Prin urmare, $u_\#$ induce homomorfismul $u_\#^* : \pi_n^*(X,x_0) \longrightarrow \pi_n^*(X,x_1)$. Vom arăta că acest homomorfism este independent de drumul u. Fie u' un alt drum de la x_0 la x_1. Pentru $x \in \pi_n(X,x_0)$, avem $u_\#(x) - u'_\#(x) \in \Omega_n(X,x_1)$. În adevăr, dacă luăm $w=u^{-1}u'$, atunci $u_\#(x)-u'_\#(x)=u_\#(x)-w_\#(u_\# x)=$ $=u_\#(x)-(uw)_\#(x)$. Rezultă deci că $u_\#^* = u'^*_\#$.

Fie acum $f:S^n \longrightarrow X$, cu $f(1)=x_0$ (am notat cu 1 punctul bază al sferei S^n). Atunci $[f] \in \pi_n(X,x_0)$ şi putem considera deci $\hat{[f]} \in \pi_n^*(X,x_0)$. Dacă $g:S^n \longrightarrow X$ este altă aplicaţie continuă, cu $g \simeq f$ şi $g(1)=x_1$, atunci deducem $\hat{[g]} \in \pi_n^*(X,x_1)$. Fie $F:S^n \times I \longrightarrow X$, cu $F(p,0)=f(p)$, $F(p,1)=g(p)$ şi luăm $u:I \longrightarrow X$, cu $u(t)=F(1,t)$ şi avem $u_\#[f]=[g]$. Atunci, prin identificarea precedentă, deducem că $\hat{[f]} = \hat{[g]}$.

(c) Aplicaţia $g:X \longrightarrow Y$ induce homomorfismul $g_\# : \pi_n(X,x_0) \longrightarrow \pi_n(Y,f(x_0))$.

Dacă considerăm un generator $x-u_\#(x)$ al grupului $\Omega_n(X,x_0)$, atunci $g_\#(x-u_\#(x))=g_\#(x)-g_\# u_\#(x)=g_\#(x)-(gu)_\#(g_\#(x))$ (Ex. 7.1 (d)), care arată că $g_\#(\Omega_n(X,x_0)) \subset \Omega_n(Y,f(x_0))$. Aşadar, este indus homomorfismul $g_\# : \pi_n^*(X,x_0) \longrightarrow \pi_n^*(Y,g(x_0))$.

7.3. Date două elemente $x,y \in \pi_2(X,Y)$, să se arate $[\partial_\# x]_\# y = x^{-1}yx$. Să se arate că dacă $\pi_2(X,Y)$ este abelian şi $i_\#\pi_1(Y)=0$, atunci perechea (X,Y) este (relativ) 2-simplă.

Rezolvare. Considerăm mai întîi cazul cînd $X=E^2 \vee E^2$ şi $Y=S^1 \vee S^1$, cu punctul bază s_0. Avem atunci $\pi_2(E^2 \vee E^2, S^1 \vee S^1) \cong \pi_1(S^1 \vee S^1)$ şi fie α şi β generatorii grupului $\pi_2(E^2 \vee E^2, S^1 \vee S^1)$ (Ex. 6.9)

Atunci $\partial_*(\alpha^{-1}\beta\alpha)=(\partial_*\alpha)^{-1}(\partial_*\beta)(\partial_*\alpha)$, deoarece ∂_* este un homomorfism de grupuri. Apoi, cum $\partial_*\alpha$, $\partial_*\beta \in \pi_1(S^1 \vee S^1)$, putem scrie $(\partial_*\alpha)^{-1}(\partial_*\beta)(\partial_*\alpha)=(\partial_*\alpha)_\#(\partial_*\beta)$. Prin urmare $\partial_*(\alpha^{-1}\beta\alpha)=$ $=(\partial_*\alpha)_\#(\partial_*\beta)$

Pe de altă parte, avem pentru orice drum u în $S^1 \vee S^1$, $u_\# \partial_* = \partial_* u_\#$ (vezi în continuare Ex. 7.4, soluţia pentru (d)). Dacă luăm $[u]=\partial_*\alpha$ avem $(\partial_*\alpha)_\#(\partial_*\beta)=\partial_*((\partial_*\alpha)_\#\beta)$. Prin urmare: $\partial_*(\alpha^{-1}\beta\alpha)=\partial_*((\partial_*\alpha)_\#\beta)$ şi cum $E^2 \vee E^2$ este spaţiu contractibil şi deci $\partial_* : \pi_2(E^2 \vee E^2, S^1 \vee S^1) \longrightarrow \pi_1(S^1 \; S^1)$ este izomorfism, deducem $\alpha^{-1}\beta\alpha=(\partial_*\alpha)_\#\beta$.

Considerăm acum cazul general, cu (X,Y) o pereche topologică arbitrară cu punctul bază x_0. Fie $x,y \in \pi_2(X,Y,x_0)$ două elemente preprezentate prin $x=[f]$, $y=[g]$, cu $f,g:(E^2,S^1,\dot{s}) \longrightarrow (X,Y,x_0)$. Definim aplicaţia $\varphi :(E^2 \vee E^2 ,S^1 \vee S^1) \longrightarrow (X,Y)$, prin $\varphi(t,pct)=f(t)$ şi $\varphi(pct,t)=g(t)$. Avem atunci $x=\varphi_\#(\alpha)$ şi $y=\varphi_\#(\beta)$. Deducem $x^{-1}yx=\varphi_\#(\alpha^{-1}\beta\alpha)=\varphi_\#((\partial_*\alpha)_\#\beta)=$ $=(\varphi(\partial_*\alpha))_\#(\varphi_\#(\beta))=(\partial_*(\varphi_\#(\alpha))_\# y=(\partial_* x)_\# y$.

Să presupunem acum că $\pi_2(X,Y)$ este abelian şi $i_\#\pi_1(Y)=0$. Din şirul exact de omotopie al perechii (X,Y) deducem că $\partial_*:\pi_2(X,Y)\longrightarrow\pi_1(Y)$ este epimorfism. Deci, pentru orice $[u] \in \pi_1(Y)$, avem $[u]=\partial_*(x)$, $x \in \pi_2(X,Y)$. Atunci, dacă $y \in \pi_2(X,Y)$, avem $u_\#(y)=(\partial_*(x))_\#(y)=x^{-1}yx=y$ şi prin urmare (X,Y) este relativ 2-simplă (vezi definiţia la pg. 266).

7.4. Fie $\mathcal{Q}_n(X,Y)$ subgrupul generat de toate elementele de forma $x-u_{\#}(x)$, unde $u \in \pi_1(Y)$. Să se arate că:

(a) $\mathcal{Q}_n(X,Y)$ este un subgrup normal al grupului $\pi_n(X,Y)$;

(b) Dacă Y este liniar conex şi $\pi_n^*(X,Y)$ notează grupul factor $\pi_n(X,Y)/\mathcal{Q}_n(X,Y)$, atunci o clasă de omotopie de aplicaţii $f:(I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X,Y)$, (fără punct bază) defineşte un unic element al grupului $\pi_n^*(X,Y)$ şi că produsul a două asemenea elemente poate fi obţinut ca în Propoziţia 7.2.15;

(c) Orice aplicaţie de perechi $g:(X,Y) \longrightarrow (Z,W)$ induce un homomorfism $g_* : \pi_n^*(X,Y) \longrightarrow \pi_n^*(Z,W)$ $(n \geq 2)$;

(d) Dacă $\pi_1(X,Y)=0$, există homomorfismele $j_*:\pi_n^*(X) \longrightarrow \pi_n^*(X,Y)$ şi $\partial_*: \pi_n^*(X,Y) \longrightarrow \pi_{n-1}^*(Y)$, astfel încît $j_* i_* = 0$, $\partial_* j_* = 0$ şi $i_* \partial_* = 0$

Rezolvare

(a) Grupurile de omotopie relativă $\pi_n(X,Y)$ sînt definite pentru $n \geq 2$ şi avem prin definiţie $\pi_n(X,Y) = \pi_{n-1}(L_1)$ (pg. 264, Definiţia 7.2.9). Prin urmare, pentru $n \geq 3$ grupurile $\pi_n(X,Y)$ sînt abeliene.

Fie $n=2$ şi fie $x=(u_{\#} x)^{-1}$ un generator al grupului $\mathcal{Q}_2(X,Y)$ şi $y \in \pi_2(X,Y)$ un element arbitrar. Atunci: $y.x(u_{\#} x)^{-1}.y^{-1} =$

$= (y.x).(u_{\#}(y.x))^{-1}.u_{\#}(y).u_{\#}(x)(u_{\#}(x))^{-1}y^{-1} =$

$= \left[(y.x).(u_{\#}(y.x))^{-1}\right].(y.u_{\#}(y)^{-1})^{-1} \in \mathcal{Q}_2(X,Y)$, ca produs de elemente din $\mathcal{Q}_2(X,Y)$. Aşadar, şi pentru $n=2$ $\mathcal{Q}_n(X,Y)$ este normal.

(b) Arătăm că grupurile $\pi_n(X,Y,x_0)$ şi $\pi_n(X,Y,x_1)$ sînt canonic izomorfe, $x_0, x_1 \in Y$. Fie u un drum în Y de la x_0 la x_1. Putem considera atunci homomorfismul

$u_{\#} : \pi_n(X,Y,x_0) \longrightarrow \pi_n(X,Y,x_1)$ (Teorema 7.2.12).

Dacă $x - v_{\#}(x) \in \pi_n(X,Y,x_0)$ este un generator al grupului $\mathcal{Q}_n(X,Y,x_0)$, atunci $u_{\#}(x-v_{\#}(x)) = u_{\#}(x) - w_{\#}(u_{\#}(x))$, pentru $w = u_{\#}(v)$, adică $u_{\#}(x-v_{\#}(x)) \in \mathcal{Q}_n(X,Y,x_1)$. Prin urmare, $u_{\#}$ induce un homomorfism $\hat{u}_{\#} : \pi_n^*(X,Y,x_0) \longrightarrow \pi_n^*(X,Y,x_1)$.

Acesta este de fapt un izomorfism şi, ca în Exerciţiul 7.2.(b), se arată că acesta nu depinde de drumul u.

Fie acum aplicaţia de perechi $f:(I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X,Y)$. Spaţiul $D^{n-1}=I^{n-1}\times 1 \cup \partial I^{n-1}\times I$ este contractibil şi fie omotopia $C:D^{n-1}\times I \longrightarrow D^{n-1}$, cu $C(d,0)=d$ şi $C(d,1)=d_0$, $\forall\ d \in D^{n-1}$.

Putem considera aplicaţia $f\circ C:D^{n-1}\times I \longrightarrow Y$, care este o omotopie a aplicaţiei f/D^{n-1} cu o aplicaţie constantă. Această omotopie se poate extinde la ∂I^n şi apoi la I^n, astfel încît este omotopia (de perechi) a aplicaţiei f cu o aplicaţie $f':(I^n, \partial I^n, D^{n-1}) \longrightarrow (X,Y,x_e)$.

Asociem aplicaţiei f elementul $\widehat{[f']}\in\pi_n^*(X,Y,x_0)$.

Dacă $g:(I^n, \partial I^n)\longrightarrow (X,Y)$ este o altă aplicaţie de perechi, omotopă cu f, aceasta defineşte elementul $\widehat{[g']} \in \pi_n^*(X,Y,x_1)$.

După Propoziţia 7.2.15 există un drum w în Y de la x_0 la x_1, astfel încît $w_\#[f']=[g']$. Cum $w_\#^*$ este un izomorfism canonic, rezultă că $\widehat{[f']}$ se identifică cu $\widehat{[g']}$. Prin urmare, $\widehat{[f']}$ depinde numai de clasa de omotopie (fără punct bază) a aplicaţiei f.

Dacă $f,g:(I^n, \partial I^n)\longrightarrow (X,Y)$ sînt două aplicaţii de perechi şi dacă $f',g':(I^n, \partial I^n, D^{n-1}) \longrightarrow (X,Y,x_i)$, $i=0,1$, respectiv pentru f' şi g'. Putem considera produsul $\widehat{[f']}\,\widehat{[g']}\in\pi_n^*(X,Y)$.

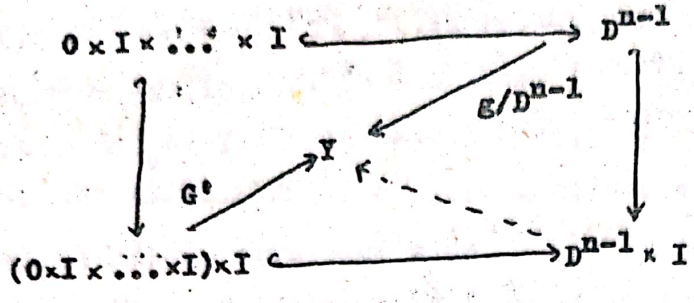
Dacă presupunem că este satisfăcută condiţia $f(1,x_2,\dots,x_n)=g(0,x_2,\dots,x_n)$, atunci putem considera aplicaţia $f\circ g$ definită prin

$$(f\circ g)(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases} f(2x_1,x_2,\dots,x_n), & x_1\in[0,1/2] \\ g(2x_1-1,x_2,\dots,x_n), & x_1\in[1/2,1] \end{cases}$$

care este o aplicaţie de perechi $f\circ g:(I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X,Y)$.

Avem de arătat că $\widehat{[f']}\,\widehat{[g']}=\widehat{[f\circ g)']}$, adică $\widehat{[f'\circ g']}=\widehat{[(f\circ g)']}$, ceea ce revine la a dovedi că aplicaţiile $f'\circ g'$ şi $f\circ g$ sînt omotope ca aplicaţii de perechi de la $(I^n, \partial I^n)$. Fie pentru aceasta F omotopia lui f' cu f şi fie $G':(0\times\underbrace{I\times\dots\times I}_{n-1})\times I \longrightarrow Y$,

aplicaţia $G'(0,x_2,\dots,x_n;t)=F((1,x_2,\dots,x_n),t)$. Atunci, considerînd proprietatea de extensie a omotopiei în diagrama



deducem că există $G'':D^{n-1}\times I \longrightarrow Y$, încît $G''(x_1,\dots,x_n;0)=g(x_1,\dots,x_n)$, pentru $(x_1,\dots,x_n)\in D^{n-1}$ şi $G''(0,x_2,\dots,x_n;t)=G'(0,x_2,\dots,x_n;t)=F((1,x_2,\dots,x_n),t)$. Prelungim aplicaţia G'' la $\partial I^n\times I$ şi apoi la $I^n\times I$ şi obţinem $G:(I^n\times I,\ \partial I^n\times I)\longrightarrow (X,Y)$, cu $G((x_1,\dots,x_n),0)=g(x_1,\dots,x_n)$ şi $G((0,x_2,\dots,x_n),t)=F((1,x_2,\dots,x_n),t)$.

Putem defini aplicaţia $H:(I^n\times I,\ \partial I^n\times I)\longrightarrow (X,Y)$ prin :

$$H((x_1,\dots,x_n),t)=\begin{cases}F(2x_1,x_2,\dots,x_n),t), & x_1\in[0,1/2]\\ G((2x_1-1,x_2,\dots,x_n),t), & x_1\in[1/2,1]\end{cases}$$

Atunci: $H((x_1,\dots,x_n),0)=(f\circ g)(x_1,\dots,x_n)$ şi $H((x_1,\dots,x_n),1)=(f'\circ g')(x_1,\dots,x_n)$.

Se poate arăta mai mult şi anume, că dacă $f(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)=g(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)$ şi se consideră aplicaţia

$$(f\circ_i g)(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases}f(x_1,\dots,2x_i,\dots,x_n), & x_i\in[0,1/2]\\ g(x_1,\dots,2x_i-1,\dots,x_n), & x_i\in[1/2,1]\end{cases}$$

avem de asemenea $[\hat{f}'][\hat{g}']=[\widehat{(f\circ_i g)'}]$.

Pentru $i=2,\dots,n-1$ demonstraţia este ca mai sus. Pentru $i=n$ (pentru care nu se poate repeta demonstraţia deoarece intervine D^{n-1}) considerăm aplicaţiile $\overline{f},\overline{g}:(I^n,\ \partial I^n)\longrightarrow (X,Y)$ cu $\overline{f}(x_1,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_{n-2},1-x_n,x_{n-1})$ şi $\overline{g}$ definit analog. In Propoziţia 7.2.15 se arată că f şi $\overline{f}$ sînt omotope ca aplicaţii de

perechi. Avem de aici următoarele egalităţi: $[\widehat{f'}]\,[\widehat{g'}]=[\widehat{\overline{f}'}]\,[\widehat{\overline{g}'}]=$
$=[(\overline{f}\circ_{n-1}\overline{g})']=[\widehat{(\overline{f\circ_n g})'}]=[\widehat{(f\circ_n g)'}]$.

(c) Aplicaţia $g:(X,Y)\longrightarrow(Z,W)$ induce un homomorfism $g_*:\pi_n(X,Y,x_0)\longrightarrow\pi_n(Z,W,g(x_0))$. Dacă considerăm un generator $x-u_\#(x)$ al grupului $\Omega_n(X,Y,x_0)$, aplicînd Teorema 7.2.12,(d), se deduce că $g_*(x-u_\#(x))\in\Omega_n(Z,W,f(x_0))$. Prin urmare $g_*(\Omega_n(X,Y,x_0))\subset\Omega_n(Z,W,f(x_0))$ şi deci este indus un homomorfism $g_*:\pi_n^*(X,Y)\longrightarrow\pi_n^*(Z,W)$ (punctele bază nu mai contează în baza celor demonstrate la (b)).

(d) Putem considera şirul exact de omotopie al perechii (X,Y), cu punctul bază $x_0\in Y$:

$$\ldots\to\pi_n(Y,x_0)\xrightarrow{I_*}\pi_n(X,x_0)\xrightarrow{J_*}\pi_n(X,Y,x_0)\xrightarrow{\overline{\partial}_*}\pi_{n-1}(Y,x_0)$$

Ţinînd seama de (c), incluziunile $i:Y\longrightarrow X$ şi $j:(X,x_0)\longrightarrow(X,Y)$ induc homomorfismele $i_*:\pi_n^*(Y)\longrightarrow\pi_n^*(X)$ şi respectiv $j_*:\pi_n^*(X)\longrightarrow\pi_n^*(X,Y)$. Dar i_* şi j_* sînt induse de I_* şi respectiv J_*. Rezultă că avem: $j_*\,i_*(\hat{x})=j_*(\widehat{I_*(x)})=(\widehat{J_*I_*(x)})=0$.

Fie acum u un drum în Y de la x_0 la x_1. Vom arăta că $u_\#\,\overline{\partial}_*=\overline{\partial}_*\,u_\#$. Fie $x=[f]\in\pi_n(X,Y,x_0)$. După Teorema 7.2.12, $u_\#[f]=[f']\in\pi_n(X,Y,x_1)$, pentru $F:I^n\times I\longrightarrow X$, cu $F(\partial I^n\times I)\subset Y$, $F(d,t)=u(t)$, $\forall\,d\in D^{n-1}$ şi $F(x,1)=f'(x)$, $\forall\,x\in I^n$. Atunci: $\overline{\partial}_*\,u_\#[f]=\overline{\partial}_*[f']=[f'/I^{n-1}]'$, unde $[\,]'$ notează clasa de omotopie a aplicaţiei $f'/I^{n-1}:(I^{n-1},\partial I^{n-1})\longrightarrow(Y,x_0)$.

Pe de altă parte: $u_\#\,\overline{\partial}_*[f]=u_\#([f/I^{n-1}]')$. Dar este clar că aplicaţia $F'=F/I^{n-1}\times I:I^{n-1}\times I\longrightarrow Y$ satisface condiţiile: $F'(x,t)=u(t)$, $\forall\,x\in\partial I^{n-1}$, $F'(x,0)=f(x)$, $\forall\,x\in I^{n-1}$. Avem apoi $F'(x,1)=F(x,1)=f'(x)$, $\forall\,x\in I^{n-1}$. Aplicînd Teorema 7.2.3, avem $u_\#\,\overline{\partial}_*[f]=[f'/I^{n-1}]'=\overline{\partial}_*\,u_\#[f]$.

Dacă luăm acum $x-u_\#(x)$ un generator al grupului $\Omega_n(X,Y,x_0)$, atunci $\overline{\partial}_*(x-u_\#(x))=\overline{\partial}_*(x)-\overline{\partial}_*\,u_\#(x)=\overline{\partial}_*(x)-u_\#(\overline{\partial}_*(x))\in\Omega_{n-1}(Y,x_0)$ şi în felul acesta $\overline{\partial}_*$ induce homomorfismul

$\partial_* : \pi_n^*(X,Y) \longrightarrow \pi_{n-1}^*(Y)$. Deoarece $\bar{\partial}_* \bar{j}_* = 0$ şi $\bar{i}_* \bar{\partial}_* = 0$ rezultă $\partial_* j_* = 0$ şi respectiv $i_* \partial_* = 0$.

7.5. Fie (X,Y) o pereche de spaţii topologice. Să se deducă din şirul exact de omotopie al acestei perechi, următoarele rezultate:

(a) Dacă Y este retarctă a lui X, atunci

$$\pi_n(X) \cong \pi_n(Y) \oplus \pi_n(X,Y), (n \geq 2)$$

(b) Dacă 1_X este omotopă cu o aplicaţie a lui X în Y, atunci

$$\pi_n(Y) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_{n+1}(X,Y), (n \geq 2)$$

(c) Dacă $i: Y \longrightarrow X$ este omotopă cu o aplicaţie constantă, atunci $\pi_n(X,Y) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_{n-1}(Y), (n \geq 3)$

(Toate aplicaţiile şi omotopiile sînt presupuse cu puncte bază).

Rezolvare.

(a) Fie $i: Y \longrightarrow X$ şi fie $r: X \longrightarrow Y$ retracţia. Avem $ri = Id$ şi deci $r_* i_* = 1$, care arată că i_* este monomorfism. Deducem că în şirul exact de omotopie al perechii (X,Y) avem $\operatorname{Im} \partial_* = \operatorname{Ker} i_* = 0$. Avem deci şirul exact

$$0 \longrightarrow \pi_n(Y) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X,Y) \longrightarrow 0 \text{ şi } r_* i_* = 1.$$

Aplicînd Exerciţiul 1.3 rezultă că şirul de mai sus este scindat.

(b) Fie $r: X \longrightarrow Y$ astfel încît $1_X \simeq ir$. Rezultă că $i_* r_* = Id$ şi prin urmare i_* este surjecţie. Cum $\operatorname{Im} i_* = \operatorname{Ker} j_*$ rezultă că $j_* = 0$, deci are loc şirul exact

$$0 \longrightarrow \pi_{n+1}(X,Y) \xrightarrow{\partial_*} \pi_n(Y) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X) \longrightarrow 0$$

şi cu condiţia $i_* r_* = Id$, rezultă că şirul acesta este scindat.

(c) Dacă i este omotopă cu o aplicaţie constantă, atunci $i_* = 0$. Se obţine şirul exact

$$0 \longrightarrow \pi_n(X) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X,Y) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(Y) \longrightarrow 0$$

de grupuri abeliene, pentru $n \geq 3$. Arătăm acum că există un homomorfism $\gamma : \pi_{n-1}(Y) \longrightarrow \pi_n(X,Y)$, încît $\partial_* \gamma = Id$. Fie pentru aceasta $h: Y \times I \longrightarrow X$, cu $h(y,0) = i(y) = y$, $h(y,1) = h(x_0,t) = x_0$, $\forall\ y \in Y$. Cum presupunem că punctul bază este x_0, fie

$[f] \in \pi_{n-1}(Y,x_0)$, cu $f:(I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \longrightarrow (Y,x_0)$. Definim $g:I^n \longrightarrow X$ prin $g(x_1,\ldots,x_n)=h(f(x_1,..,x_{n-1}),x_n)$. Se verifică uşor condiţiile $g(\partial I^n) \subset Y$ şi $g(D^{n-1})=x_0$, astfel încît g defineşte un element $[g] \in \pi_n(X,Y,x_0)$. Definim $\gamma[f]=[g]$, după cum se poate uşor constata că este posibil (adică $f \simeq f' \Rightarrow g \simeq g'$). Rezultă de asemenea că γ este un homomorfism, deoarece dacă avem corespondenţele $f \longrightarrow g$ şi $f' \longrightarrow g'$, atunci $f \circ f' \longrightarrow g \circ g'$, compunerile fiind în sensul Propoziţiei 7.2.2, utilizînd de exemplu prima coordonată.

Avem acum $\partial_* \gamma[f]=\partial_*[g]=[g/I^{n-1}]=[f]$.

7.6. Fie X un AH'I şi Y,Z spaţii topologice arbitrare (cu puncte bază). Să se arate că

$$[X,Y\times Z] \cong [X,Y] \oplus [X,Z].$$

Rezolvare. Facem mai întîi observaţia că deoarece X este AH'I, $[X,Y\times Z]$, $[X,Y]$ şi $[X,Z]$ sînt grupuri (Teorema 6.3.11). Proiecţiile $p_Y:Y\times Z \longrightarrow Y$ şi $p_Z:Y\times Z \longrightarrow Z$ induc, în baza aceleaşi teoreme, homomorfismele $(p_Y)_*:[X,Y\times Z] \longrightarrow [X,Y]$ şi respectiv $(p_Z)_*:[X,Y\times Z] \longrightarrow [X,Z]$. Putem defini atunci homomorfismul $\varphi:[X,Y\times Z] \longrightarrow [X,Y]\oplus[X,Z]$ prin $\varphi([f])=(((p_Y)_*([f]),(p_Z)_*([f]))$. Putem considera de asemenea aplicaţia $\psi:[X,Y]\oplus[X,Z] \longrightarrow [X,Y\times Z]$, definită prin $\psi([i],[g])=[h]$, unde $h:X \longrightarrow Y\times Z$ este $h(x)=(f(x),g(x))$. Se verifică uşor că ψ este inversă pentru φ. Cum φ este şi homomorfism de grupuri, rezultă că această aplicaţie este un izomorfism.

7.7. Fie X un AH'I comutativ. Să se arate că :

(a) $[X,Y\vee Z] \cong [X,Y]\oplus[X,Z]\oplus[X,L_i]$

unde L_i este "spaţiul de drumuri" pentru incluziunea $i:Y\vee Z \longrightarrow Y\times Z$;

(b) $[X,L_i]$ este în corespondenţă bijectivă cu mulţimea claselor de omotopie de aplicaţii cu punct bază de forma

$$(X\wedge I, X\wedge 0) \longrightarrow (Y\times Z, Y\vee Z).$$

Rezolvare. Reamintim că $L_1=\{(a,\lambda)\in(Y\vee Z)\times L(Y\times Z)/\lambda(0)=i(a),\lambda(1)=(y_0,z_0)\}$.

(a) După Teorema 6.4.14, putem considera şirul exact de grupuri indus de aplicaţia $i:Y\vee Z\longrightarrow Y\times Z$:

$$\ldots \xrightarrow{i''_*} [X,L_1] \xrightarrow{i'_*} [X,Y\vee Z] \xrightarrow{i_*} [X,Y\times Z],$$ unde

$i'(x,\lambda)=x$ şi $i''(x,\lambda,\mu)=(x,\lambda)$.

Considerăm de asemenea aplicaţiile :

$p_Y:Y\times Z\longrightarrow Y$, cu $p_Y(y,z)=y$; $p_Z:Y\times Z\longrightarrow Z$, cu $p_Z(y,z)=z$;

$i_Y:Y\longrightarrow Y\vee Z$, cu $i_Y(y)=(y,z_0)$ şi $i_Z:Z\longrightarrow Y\vee Z$, cu $i_Z(z)=(y_0,z)$. Putem defini atunci homomorfismul de grupuri:

$\varphi:[X,Y\times Z]\longrightarrow[X,Y\vee Z]$, prin $\varphi=(i_Yp_Y)_*+(i_Zp_Z)_*$.

Avem atunci $i_*\varphi=(i_Yp_Yi)_*+(i_Zp_Zi)_*=Id$, care arată că i_* este epimorfism şi deci are loc şirul exact de grupuri:

$$\ldots \xrightarrow{(i_2^1)_*}[X,\Omega L_1]\xrightarrow{(i_1^1)_*}[X,\Omega(Y\vee Z)]\xrightarrow{i^1_*}[X,\Omega(Y\times Z)]\xrightarrow{(i_2)_*}$$

$$[X,L_1]\xrightarrow{(i_1)_*}[X,Y\vee Z]\xrightarrow{i_*}[X,Y\times Z]\longrightarrow 0$$

unde $i_1=i'$, $i_2=i''\phi$, pentru $\phi:\Omega(Y\times Z)\longrightarrow L_1\subset L_1\times L(Y\vee Z)$, definit prin $\phi(\lambda)=(\text{pct.bază},\lambda,e)$, $e:I\longrightarrow Y\vee Z$ drum constant.

Deoarece i_* este surjectivă, rezultă uşor că $(i^1)_*$ este epimorfism. Prin urmare $(i_2)_*$ este homomorfismul nul. Se obţine astfel şirul scindat de grupuri abeliene (deoarece X este AH'I comutativ)

$$0\longrightarrow[X,L_1]\xrightarrow{i'_*}[X,Y\vee Z]\underset{\varphi}{\overset{i_*}{\rightleftarrows}}[X,Y\times Z]\longrightarrow 0.$$

Avem prin urmare: $[X,Y\vee Z]\cong[X,Y\times Z]\oplus X,L_1$ şi aplicînd Exerciţiul 7.6 deducem (a).

(b) Este evident că spaţiul L_1 este în corespondenţă bijectivă cu $L=\{\lambda\in L(Y\times Z)/\lambda(0)\in Y\vee Z\}$.

Notăm $A=Y\vee Z$, $B=Y\times Z$ şi avem deci $L\subseteq B^I$, $I=[0,1]$. Deoarece I este spaţiu Hausdorff local compact, din Teorema 6.2.38(a),(b), rezultă că funcţia de asociere $\alpha:B^{X\wedge I}\longrightarrow(B^I)^X$ este bijectivă.

Aplicaţia α asociază fiecărei aplicaţii $X \longrightarrow L_1$ o funcţie $(X \wedge I, X \wedge 0) \longrightarrow (Y \times Z, Y \vee Z)$, cu punct bază. Dacă se înlocuieşte X cu $X \times I$ corespondenţa se păstrează, adică α se păstrează omotopiile, astfel încît, în baza corespondenţei bijective dintre L_1 şi L, se deduce că α determină o bijecţie între $[X, L_1]$ şi $[(X \wedge I, X \wedge 0), (Y \times Z, Y \vee Z)]$ prin $[f] \longrightarrow [\alpha^{-1}(f)]$.

7.8. Dacă F este unul din corpurile R(al numerelor reale), C(al numerelor complexe sau H(al cuaternionilor), atunci spaţiul F-proiectiv de dimensiune n, notat FP^n, este definit ca fiind spaţiul $(F^{n+1}-0)/S$, unde S este relaţia de echivalenţă dată prin $xSy \Leftrightarrow x=fy$, pentru un $f \in F$. FP^n se consideră cu topologia cît şi clasa de echivalenţă a lui $(f_1,\ldots,f_{n+1}) \in C^{n+1}-0$ se notează prin $[f_1,\ldots,f_{n+1}]$.
Scriind punctele discului E^{2n} sub forma $(z_1,\ldots,z_n,r)$, unde $0 \leq r \leq 1$ şi $z_1,\ldots,z_r$ sînt numere complexe încît $|z_1|^2+\ldots+|z_n|^2=1-r^2$, să se dovedească că CP^n este homeomorf cu spaţiul obţinut din E^{2n} identificînd punctele lui S^{2n-1} care sînt aplicate în acelaşi punct prin $p: S^{2n-1} \longrightarrow CP^{n-1}$, unde p este definită prin $p(z_1,\ldots,z_n)=[z_1,\ldots,z_n]$. Să se arate că CP^n este un CW-complex cu cîte o celulă în fiecare din dimensiunile $0,2,\ldots,2n$.
In mod similar, să se arate că HP^n este un CW-complex cu cîte o celulă în fiecare din dimensiunile $0,4,\ldots,4n$.

Rezolvare. Pentru $F=C$, $CP^n=(C^{n+1}-0)/S$, unde, pentru $y, y' \in C^{n+1}-0$, avem $ySy' \Leftrightarrow \exists\, z \in C\ (z \neq 0)$, încît $y'=zy$.
Considerăm S^{2n+1} ca subspaţiu al lui C^{n+1}, anume $S^{2n+1}=\left\{(z_1,\ldots,z_{n+1}) \in C^{n+1} / \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2=1\right\}$ şi fie $S^1=\{z \in C / |z|=1\}$.
Considerăm acţiunea la stînga a grupului S^1 pe spaţiul S^{2n+1}, $S^1 \times S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}$, definită prin $(z, y) \longrightarrow zy$. Considerăm spaţiul orbitelor S^{2n+1}/S^1. Putem defini atunci aplicaţia $f: S^{2n+1}/S^1 \longrightarrow CP^n$ prin $f(\hat{y})=[y]$. In adevăr, dacă $\hat{y}'=\hat{y}$, atunci $y'=zy$, $z \in S^1$ şi deci $y'Sy$, adică $[y']=[y]$. Mai putem considera aplicaţia $g: CP^n \longrightarrow S^{2n+1}/S^1$, cu $g([y])=\left(\widehat{\frac{y}{\|y\|}}\right)$.
In adevăr, dacă $[y']=[y] \Rightarrow y'=zy$, care implică $\|y'\|=\|z\|\|y\|$, de

unde deducem că $\frac{z\,y'}{\|z\|\|y'\|} = \frac{z}{\|z\|} : \frac{y}{\|y\|}$, care arată că avem $\left(\widehat{\frac{y'}{\|y'\|}}\right) = \left(\widehat{\frac{y}{\|y\|}}\right)$.

Aplicaţiile f şi g sînt continue. Astfel, pentru continuitatea lui f observăm că este continuă aplicaţia

$\overline{f}: S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}/S^1 \xrightarrow{f} CP^n$, $\overline{f}(\xi) = [\xi]$ deoarece este restricţia la S^{2n+1} a proiecţiei canonice $C^{n+1}-0 \longrightarrow CP^n$.

In mod analog, este continuă aplicaţia

$\overline{g}: C^{n+1}-0 \longrightarrow CP^n \xrightarrow{g} S^{2n+1}/S^1$, $\overline{g}(\xi) = \left(\widehat{\frac{\xi}{\|\xi\|}}\right)$

deoarece $|\ \|$ este aplicaţie continuă şi de asemenea este continuă proiecţia canonică $S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}/S^1$.

In sfîrşit, se verifică imediat că f şi g sînt inverse una alteia. Astfel CP^n se poate identifica cu S^{2n+1}/S^1. (Să observăm că orbita unui punct $\xi \in S^{2n+1}$ este homeomorfă cu un cerc: $\widehat{\xi} = \{\xi' = z\,\xi\}$). Fie proiecţia canonică $p: S^{2n-1} \longrightarrow CP^{n-1}$, care poate fi scrisă $p(z_1,..,z_n) = [z_1,..,z_n]$, pentru CP^{n-1}.

Să mai observăm că incluziunea $C^{n-1}-0 \longrightarrow C^{n+1}-0$, $(z_1,..,z_n) \longrightarrow (z_1,...,z_n,0)$ induce incluziunea $i: CP^{n-1} \longrightarrow CP^n$. Avem astfel aplicaţiile $E^{2n} \supset S^{2n-1} \xrightarrow{p} CP^{n-1} \subset CP^n$. Avem de arătat că CP^n este homeomorf cu spaţiul de adjuncţie $CP^{n-1} \cup_p E^{2n}$. Cum CP^0 este un punct, va rezulta şi structura de CW-complex a lui CP^n.

Pentru a stabili homeomorfismul $CP^{n-1} \cup_p E^{2n} \equiv CP^n$, fie aplicaţia $f: E^{2n} \longrightarrow CP^n$, $f(z_1,..,z_n) = [z_1,..,z_n,r]$. (Este clar că $(z_1,..,z_n,r) \in C^{n+1}-0$, pentru oricare punct $(z_1,..,z_n) \in E^{2n}$). Putem construi atunci aplicaţia $h: CP^{n-1} \cup_p E^{2n} \longrightarrow CP^n$ egală cu i pe CP^{n-1} şi egală cu f pe E^{2n}.

Aplicaţia h este bine definită, deoarece dacă $(z_1,..,z_n) \in S^{2n-1}$ şi $[z_1',...,z_n'] \in CP^{n-1}$ încît $p(z_1,..,z_n) = [z_1',...,z_n']$, adică $[z_1,...,z_n] = [z_1',..,z_n']$, rezultă $[z_1,..,z_n,0] = [z_1',...,z_n',0]$, adică $f(z_1,..,z_n) = i([z_1',...,z_n'])$. Aplicaţia h este continuă şi se verifică uşor că este bijecţie. Deoarece $CP^{n-1} \cup_p E^{2n}$ este

compact şi CP^n este separat(Exerciţiul 1.10),rezultă că h este un homeomorfism.

Dacă considerăm acum F=H,putem considera sfera S^3 ca submulţimea cuaternionilor de normă 1.Se poate defini atunci o acţiune a stînga a lui S^3 pe S^{4n+3}= $\{(h_1,\dots,h_{n+1})\in H^{n+1} / \sum_{i=1}^{n+1}\|h_i\|^2=1\}$
$S^3 \times S^{4n+3} \longrightarrow S^{4n+3}$, $(h,(h_1,..,h_{n+1}))\longrightarrow(hh_1,..,hh_{n+1})$
şi se arată ,ca şi mai înainte,că există un homeomorfism $f:S^{4n+3}/S^3 \longrightarrow HP^n$.Se notează proiecţia canonică $p:S^{4n-1} \longrightarrow HP^{n-1}$ şi cu $i:HP^{n-1} \longrightarrow HP^n$ incluziunea.
Se dovedeşte că există un homeomorfism între spaţiul de adjuncţie $HP^{n-1}\cup_p E^{4n}$ şi HP^n.Se utilizează pentru aceasta aplicaţia $f':E^{4n} \longrightarrow HP^n$, $f'(h_1,\dots,h_n)=[h_1,..,h_n,r]$,unde $\sum_{i=1}^{n}\|h_i\|^2=1-r^2$.

2.9.Să se demonstreze că un CW-complex este spaţiu normal.

Rezolvare.Vom stabili un rezultat mai general şi anume:
Dacă A este o submulţime închisă a spaţiului X, $f:A \longrightarrow Y$ este continuă şi X,Y sînt spaţii normale,atunci spaţiul de adjuncţie $X\cup_f Y$ este de asemenea un spaţiu normal.
Arătăm mai întîi că $X\cup_f Y$ este un spaţiu T_1:aceasta rezultă uşor dacă se ţine seama că Y şi X-A au imagini homeomorfe în $X\cup_f Y$ şi că X,Y sînt spaţii T_1.Pentru a verifica T_4 ,arătăm că se poate construi o funcţie Urison.Fie pentru aceasta F_1 şi F_2 închise în spaţiul $X\cup_f Y$.Fie $q_2:Y \longrightarrow X\cup_f Y$ incluziunea.Atunci $q_2^{-1}(F_1)$ şi $q_2^{-1}(F_2)$ sînt închise în Y şi fie $\varphi_2:Y \longrightarrow [0,1]$ astfel încît $\varphi_2/q_2^{-1}(F_1)=0$ şi $\varphi_2/q_2^{-1}(F_2)=1$.Considerăm atunci funcţia $\chi:A\cup q_1^{-1}(F_1)\cup q_1^{-1}(F_2) \longrightarrow [0,1]$,unde $q_1:X \longrightarrow X\cup Y \longrightarrow X\cup_f Y$,prin

$$\chi(x)=\begin{cases}\varphi_2(f(x)), & x\in A\\ 0, & x\in q_1^{-1}(F_1),\\ 1, & x\in q_1^{-1}(F_2)\end{cases}$$

Deoarece domeniul de definiţie al acestei funcţii este o sub-

mulţime închisă a lui X, care este spaţiu normal, funcţia χ se poate prelungi la o funcţie continuă $\varphi_1 : X \longrightarrow [0,1]$.

Putem defini acum funcţia $\varphi : Y \cup_f X \longrightarrow [0,1]$ prin

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_2(y), z = \hat{y}, y \in Y \\ \varphi_1(x), z = \hat{x}, x \in X. \end{cases}$$

Se verifică uşor că φ este continuă. Apoi, dacă $z \in F_1$ şi $q_1^{-1}(z) \neq \phi$ atunci $z = q_1(x)$ şi deci $\varphi(z) = \varphi_1(x)$, pentru $q_1(x) \in F_1$, deci $\varphi(z) = 0$. Dacă $z \in F_1$ şi $q_1^{-1}(z) = \phi$, rezultă că $q_2^{-1}(z) \neq \phi$, adică $q_2(y) = z$. Prin urmare $\varphi(z) = \varphi_2(y)$, cu $y \in q_2^{-1}(F_1)$ şi prin urmare $\varphi(z) = 0$. Aşadar $\varphi / F_1 = 0$. In mod analog se arată că $\varphi / F_2 = 1$.

Din Teorema 7.3.12, pentru un CW-complex K, avem K^r homeomorf cu spaţiul de adjuncţie $K^{r-1} \cup_\varphi (\bigcup_\alpha E_\alpha^r)$. K^0 fiind un spaţiu discret şi discurile $E^r = E_\alpha^r$ fiind spaţii normale, rezultă inductiv, în baza rezultatului de mai sus că spaţiul K^r este normal pentru orice r şi deci $K = \bigcup_{n=0}^{\infty} K^n$ este spaţiu normal.*)

7.10. Fie K un CW-complex cu un număr finit de celule. Folosind Teorema 7.3.12 şi Teorema de Aproximare Simplicială să se arate că spaţiul K are tipul de omotopie al unui poliedru.

Să se arate că

$$\pi_1(K \vee L) \cong \pi_1(K) * \pi_1(L),$$

pentru orice CW-complexe K şi L.

Rezolvare. Fie dim K = n şi şirul scheletelor $K^0 \subset K^1 \subset \ldots \subset K^n = K$. Vom construi complexele simpliciale $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ împreună cu un şir de incluziuni simpliciale $i_r : |Y_r| \longrightarrow |Y_{r+1}|$ şi cu aplicaţii celulare $f_r : K^r \longrightarrow |Y_r|$, care să fie echivalenţe omotope şi să fie satisfăcute următoarele proprietăţi:

(i) $f_r / K^{r-1} = i_{r-1} f_{r-1}$,

(ii) $\dim Y_r = \dim K^r$,

(iii) Dacă $K^r = K^{r-1}$, atunci $Y_r = Y_{r-1}$ şi $i_{r-1} = Id$.

---

*) Deoarece $\forall n, K^n$ este închisă în K^{n+1}, rezultă (prin inducţie), că pentru orice mulţime închisă $F \subset K$, orice funcţie $h : F \longrightarrow R$ se poate prelungi prin continuitate la $h_n : F \cup K^n \longrightarrow R$, încît $h_{n+1} / F \cup K^n = h_n$. Atunci $H : K \longrightarrow R$, $H / F \cup K^n = h_n$, prelungeşte pe h.

Definim $Y_o=K^o$, $f_o:K^o \longrightarrow K^o$, aplicaţia identitate şi presupunem că am construit $Y_o,\dots,Y_{q-1}$, satisfăcînd condiţiile (i)-(iii). Avem $K^q=K^{q-1} \cup_\varphi (\bigcup_{i=1}^{\alpha_n} E_i^q)$, pentru o aplicaţie continuă $\bigcup_{i=1}^{\alpha_n} E_i^q \supset \bigcup_{i=1}^{\alpha_n} S_i^{q-1} \xrightarrow{\varphi} K^{n-1}$. Pe reuniunea disjunctă $\bigcup_{i=1}^{\alpha_n} E_i^n=E$ considerăm o triangulare, inducînd o triangulare pe subspaţiul $S=\bigcup_{i=1}^{\alpha_n} S_i^{q-1}$. Putem considera atunci compunerea

$$f_{q-1}\circ\varphi : S \longrightarrow |Y_{q-1}|,$$ pentru care fie

$g:S \longrightarrow |Y_{q-1}|$ o aproximare simplicială. Avem următoarele echivalenţe omotopice:

(a) $K^q \longrightarrow |Y_{q-1}| \cup_{f_{q-1}\varphi} E$, deoarece $f_{q-1}:K^{q-1} \longrightarrow |Y_{n-1}|$ este o echivalenţă omotopică şi perechea (E,S) are proprietatea de extensie a omotopiei;

(b) $|Y_{q-1}| \cup_{f_{q-1}\circ\varphi} E \longrightarrow |Y_{q-1}| \cup_g E$, deoarece $f_{q-1}\varphi \simeq g$

Definim $|Y_q|=|Y_{q-1}| \cup_g E$ şi considerăm triangularea indusă de triangulările pentru $|Y_{q-1}|$ şi E. Incluziunea $i_{q-1}:|Y_{q-1}| \longrightarrow |Y_q|$ este simplicială şi se verifică uşor condiţiile (i)-(iii).

Deoarece $K=K^n, Y=|Y_n|$ este poliedru echivalent omotopic cu K.

Fie acum X,Y două poliedre. Aplicînd Teorema 3.3.18, pentru $X \cap Y=$ pct. se deduce: $\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$.

Apoi, dacă K şi L sînt CW-complexe cu cîte un număr finit de celule, putem considera X şi Y două poliedre respectiv echivalente omotopic cu K şi L. Atunci $X \vee Y$ este echivalent omotopic cu $K \vee L$ şi deducem deci că $\pi_1(K \vee L) \cong \pi_1(K) * \pi_1(L)$.

Să presupunem acum K şi L două CW-complexe arbitrare. Este clar că avem $\pi_1(K) * \pi_1(L) \subseteq \pi_1(K \vee L)$. Fie apoi $[\alpha] \in \pi_1(K \vee L)$. Atunci aplicaţia $\alpha : S^1 \longrightarrow K \vee L$ intersectează un număr finit de celule din $K \vee L$ şi deci imaginea lui α se află într-un subcomplex de forma $K_1 \vee L_1$ a lui $K \vee L$, cu K_1 subcomplex al lui K şi L_1 subcomplex al lui L, ambele cu cîte un număr finit de celule. Avem $[\alpha] \in \pi_1(K_1 \vee L_1) \cong \pi_1(K_1) * \pi_1(L_1) \subseteq \pi_1(K) * \pi_1(L)$.

7.11. Un spaţiu Hausdorff se numeşte (infinit) triangulabil dacă, pentru orice $n \geq 0$, există o mulţime de indici A_n, un n-simplex σ_n şi aplicaţii $\phi_\alpha^n : \sigma_n \longrightarrow K$, pentru oricare $\alpha \in A_n$, cu următoarele proprietăţi:

(a) $K = \bigcup \phi_\alpha^n(\sigma_n)$, pentru $n \geq 0$ şi $\alpha \in A_n$,

(b) Oricare ϕ_α^n este injectivă,

(c) Dată o faţă τ_m a lui σ_n, există un homeomorfism simplicial $\psi_\tau : \sigma_m \longrightarrow \tau_m$ încît, dat $\alpha \in A_n$, există $\beta \in A_m$ cu $\phi_\beta^m = \phi_\alpha^n \psi_\tau$;

(d) $\phi_\alpha^n(\sigma_n) \cap \phi_\beta^m(\sigma_m)$ este fie vidă fie $\phi_\gamma^p(\sigma_p)$ pentru un $p \geq 0$ şi $\gamma \in A_p$. În ultimul caz există feţele τ a lui σ_n, μ a lui σ_m, încît $\phi_\gamma^p = \phi_\alpha^n \psi_\tau = \phi_\beta^m \psi_\mu$;

(e) O submulţime X a lui K este închisă dacă şi numai dacă $(\phi_\alpha^n)^{-1}(X)$ este închisă în σ_n, pentru oricare n şi orice $\alpha \in A_n$.

1) Să se arate că orice spaţiu homeomorf cu un poliedru este un spaţiu triangulabil,

2) Orice spaţiu triangulabil este un CW-complex.

Rezolvare. 1) Fie X un spaţiu topologic homeomorf cu un poliedru $|K|$, pentru un complex simplicial K, printr-un homeomorfism $h : |K| \longrightarrow X$. Pentru $n \geq 0$, fie A_n mulţimea n-simplexelor lui K şi fie σ_n un n-simplex fixat. Dacă $\alpha = \sigma_n' \in A_n$, fie $f_n : \sigma_n \longrightarrow \sigma_n'$ un homeomorfism liniar. Definim atunci $\phi_\alpha^n : \sigma_n \longrightarrow X$ compunerea $\sigma_n \xrightarrow{f_n} \sigma_n' \xrightarrow{i} |K| \xrightarrow{h} X$, unde i este incluziunea. Proprietăţile (a) şi (b) se verifică în mod evident. Apoi, dacă τ_m este o faţă a lui σ_n luăm $\psi_\tau : \sigma_m \longrightarrow \tau_m$ un homeomorfism liniar. Atunci, pentru $\alpha = \sigma_n' \in A_n$, luăm $\beta = \sigma_m' = f_n(\tau_m)$, care este faţă a lui σ_n' şi deci simplex al lui K. Se verifică astfel condiţia (c):

Condiţia (d) este verificată în baza faptului că dacă $\sigma'_m, \sigma'_n \in K$, atunci intersecţia $\sigma'_m \cap \sigma'_n$ este fie vidă fie o faţă comună pentru σ'_m şi σ'_n. In sfîrşit, proprietatea (e) rezultă din Propoziţia 2.3.8.

2) Fie acum K un spaţiu (infinit) triangulabil. Acesta este spaţiu Hausdorff şi pentru fiecare $n \geq 0$, considerăm mulţimea A_n din definiţia de mai sus. Pentru n-simplexul σ_n fie un homeomorfism $h_n : (E^n, S^{n-1}) \longrightarrow (\sigma_n, \dot{\sigma}_n)$, de exemplu cel dat la pg.36 în Exemplul 2.3.13. Pentru fiecare $\alpha \in A_n$ considerăm aplicaţia $\phi_\alpha : E^n \longrightarrow K$, ca fiind compunerea $\phi^\alpha = \phi^n_\alpha \circ h_n$. Acestea sînt aplicaţiile caracteristice pentru K, adică verifică condiţiile Definiţiei 7.3.1.

7.12. a) Să se demonstreze o "teoremă de aproximare" (analoagă teoremei de aproximare simplicială) pentru aplicaţii de la un poliedru (compact) la un spaţiu triangulabil,

b) Să se arate că orice CW-complex este omotopic echivalent cu un spaţiu triangulabil,

c) Să se demonstreze că pentru un CW-complex, cu o mulţime numărabilă de celule, grupurile de omotopie sînt numărabile.

Rezolvare. a) Fie K un complex simplicial şi T un spaţiu triangulabil. Vom spune că o aplicaţie $f : |K| \longrightarrow T$ este simplicială dacă sînt satisfăcute condiţiile (vezi Definiţia 2.3.10).

(i) Dacă a este un vîrf al lui K, atunci f(a) este vîrf al unui "simplex" $\phi^n_\alpha(\sigma_n)$, adică este imaginea prin ϕ^n_α a unui vîrf al lui σ_n,

(ii) Dacă $(a^0, a^1, \ldots, a^n)$ este un simplex al lui K, atunci $(f(a^0), \ldots, f(a^n))$, distincte sau nu, generează un "simplex" $\phi^p_\alpha(\sigma_p)$, $p \leq n$;

(iii) Dacă $x = \sum \lambda_i a^i$ este un punct al simplexului $(a^0, \ldots, a^n)$, atunci $f(x) = \sum \lambda_i f(a^i)$.

Ca şi în Propoziţia 2.3.11, se demonstrează că orice aplicaţie simplicială este continuă. Apoi, pentru un simplex $\sigma' = \phi_\alpha^n(\sigma_n)$ al lui T se defineşte "star"-ul acestuia, notat $st_T \sigma'$, ca fiind reuniunea interioarelor simplexelor $\phi_\beta^p(\sigma_p)$ care au pe σ' drept faţă (în sensul condiţiei (d) din Exerciţiul 7.11).

Dacă $f: |K| \longrightarrow T$ este o aplicaţie continuă, vom spune că o aplicaţie simplicială $g: |K| \longrightarrow T$ este o aproximare simplicială a lui f dacă pentru orice vîrf a al lui K, are loc relaţia $f(st_K(a)) \subseteq st_T(g(a))$.

Teorema de aproximare ce poate fi enunţată (în spiritul Teoremei 2.5.16) este următoarea: Pentru orice aplicaţie $f: |K| \longrightarrow T$ există un întreg r astfel încît $f: |K^{(r)}| \longrightarrow T$ are o aproximare simplicială.

Se stabileşte mai întîi afirmaţia analoagă Propoziţiei 2.5.2 şi anume: dacă f are proprietatea că pentru orice vîrf a al lui K se poate găsi un "vîrf" b al lui T, încît $f(st_K(a)) \subseteq st_T(b)$, atunci există o aproximare simplicială g a lui f, încît $g(a)=b$. Demonstraţia este aceeaşi ca şi a Propoziţiei 2.5.2.

Considerînd apoi cazul general, se rescrie demonstraţia Teoremei 2.5.16, deoarece ceea ce intervine important este Propoziţia 2.5.15 aplicată pentru complexul simplicial K.

b) Utilizînd teorema de aproximare de mai sus şi Teorema 7.3.12, se repetă construcţia din Exerciţiul 7.10.

c) Fie X un CW-complex cu o mulţime numărabilă de celule. Atunci X este echivalent omotopic cu un spaţiu triangulabil K avînd o mulţime numărabilă de simplexe. Avem $\pi_n(X) \cong \pi_n(K)$. Pe de altă parte, $\overline{\pi}_n(K)$ este în corespondenţă biunivocă cu clasele de omotopie de aplicaţii cu punct bază $f: S^n \longrightarrow K$. Considerînd f fără puncte bază, deoarece S^n este un poliedru compact, după a) fiecare f are o aproximare simplicială $g: |(S^n)^{(r)}| \longrightarrow K$. Deoarece $(S^n)^r$ are un număr finit de simplexe, iar K o mulţime

numărabilă de simplexe, rezultă că mulțimea aplicațiilor g este numărabilă. Pe de altă parte, după Corolarul 2.5.4, care se adaptează ușor, aplicația g este cu punct bază și este echivalentă omotopic cu f ca aplicații cu puncte bază. Astfel $\pi_n(K)$ are o mulțime cel mult numărabilă de elemente.

7.11. Se consideră o mulțime deschisă U în R^n. Să se arate că U este spațiu triangulabil și deci un CW-complex (Exercițiul 7.11).

Rezolvare. Se împarte R^n în hipercuburi de latură unu (de exemplu cu fețele paralele cu planele de coordonate). Se triangulează fiecare din aceste hipercuburi și obținem în felul acesta o triangulare K a spațiului R^n. Pentru mulțimea considerată U vom avea că o parte din aceste hipercuburi sînt conținute în întregime în U și vom nota simplexele provenite din aceste hipercuburi, deci mulțime simplexelor conținute în U, prin K_0. Se poate ca U să nu fie acoperită de K_0. Considerăm atunci coplexul derivat $K^{(1)}$ și notăm cu K_1 simplexele acestuia care sînt conținute în U. Continuăm astfel și notăm prin K_m mulțimea simplexelor lui $K^{(m)}$ care sînt conținute în U.

Deoarece $\text{mesh } K^{(m)} \longrightarrow 0$, cînd $m \longrightarrow \infty$, rezultă că $\forall\, x \in U$, $\exists\, m$, astfel încît $x \in |K_m|$. Putem de asemenea presupune că U este mărginită. Aceasta deoarece R^n este homeomorf cu $S^n - \{pct\}$ și deci orice deschisă din R^n este homeomorfă cu o mulțime deschisă și mărginită din R^n. Astfel, $|K_m|$ este un poliedru, pentru $\forall$ m. Avem $|K_m| \subset |K_{m+1}|$, $\forall$ m și $U = \bigcup_{m=0}^{\infty} |K_m|$ și dacă ∂U este frontiera lui U, distanța $d(\partial U, |K_m|) \longrightarrow 0$, cînd $m \longrightarrow \infty$.

Deoarece $|K_0|$ este compact (este un poliedru cu un număr finit de simplexe) și U deschisă din R^n, rezultă că există m_1 încît $|K_0| \subset \text{Int}\,|K_{m_1}|$. Apoi, există m_2 încît $|K_{m_1}| \subset \text{Int}\,|K_{m_2}|$, $m_2 > m_1$, ș.a.m.d., avem $m_0 = 0 < m_1 < m_2 < \ldots$ încît $|K_{m_p}| \subset \text{Int}\,|K_{m_{p+1}}|$, $\forall$ p. Fie acum L_p subcomplexul lui K_{m_p} format

din toate simplexele din $K_{m_p}-K_{m_{p-1}}$ $^{(m_p-m_{p-1})}$ (din construcţia precedentă rezultă că avem $K_{m_{p-1}}^{(m_p-m_{p-1})}$ un subcomplex al lui K_{m_p}) împreună cu feţele acestora.

Pentru $p=0$, luăm $L_0=K_{m_0}=K_0$. Ţinînd seama de incluziunile

$|K_{m_{p-1}}| \subset \text{Int}\,|K_{m_p}| \subset |K_{m_p}| \subset \text{Int}\,|K_{m_{p+1}}|$, deducem că $|L_{p-1}| \cap |L_{p+1}| = \phi$

Considerăm N_p subcomplexul lui L_p al cărui poliedru este $\partial|L_p| \cap \partial|L_{p+1}|$.

Avem evident că $N_p^{(m_{p+1}-m_p)} = L_p^{(m_{p+1}-m_p)} \cap L_{p+1}$ şi

$|N_p| \cap |N_{p+1}| \subset |L_{p-1}| \cap |L_{p+1}| = \phi$.

In continuare, fie M_p subcomplexul lui L_p format din simplexele care nu au nici un vîrf în N_p.

In sfîrşit, fie $\tilde{L}_p = (L_p, M_p)^{(m_{p+1}-m_p)}$.

Avem atunci, $|\tilde{L}_p| = |L_p|$, $|\tilde{L}_p| \cap |\tilde{L}_{p+1}| = |N_p^{(m_{p+1}-m_p)}|$.

(Este clar că $N_p^{(m_{p+1}-m_p)}$ este subcomplex a complexelor $\tilde{L}_p$ şi $\tilde{L}_{p+1}$). In sfîrşit, $|\tilde{L}_p| \cap |\tilde{L}_{p+h}| = \phi$, $\forall h \geq 2$.

Deducem că $\forall\, p, p' \in N$, urma complexelor $\tilde{L}_p, \tilde{L}_{p'}$ pe spaţiul $|\tilde{L}_p| \cap |\tilde{L}_{p'}|$ determină aceeaşi triangulare. Rezultă că putem considera reuniunea poliedrelor simpliciale $\tilde{L}_p$. Fie aceasta $\tilde{L} = \bigcup_{p=0}^{\infty} |\tilde{L}_p|$. Atunci $\tilde{L}$ este un spaţiu triangulabil, în sensul definiţiei din Exerciţiul 7.11. Putem preciza că are chiar o mulţime cel mult numărabilă de simplexe. In baza exerciţiului citat, $\tilde{L}$ este un CW-complex. In sfîrşit, în baza construcţiei lui $\tilde{L}$ rezultă că avem $\tilde{L} = U$ şi prin urmare U este un CW-complex.

7.14.(a).Utilizînd un argument similar ca în Teorema 7.3.12, să se arate că un CW-complex este local contractibil, adică, dat un punct x şi o mulţime deschisă U conţinînd x, există o mulţime deschisă V contractibilă, încît $x \in V \subset U$.

(b).Să se arate că un CW-complex este local liniar conex şi slab simplu local conex, în sensul Exerciţiilor 6.23, 6.25.

Rezolvare.(a).Vom face demonstraţia afirmaţiei în etape.

(a_1).Arătăm că dacă A este un subcomplex al unui CW-complex K şi V este o vecinătate a lui A, atunci există o mulţime deschisă $U \subset K$, încît $A \subset U \subset V$ şi A este retractă tare de deformare a lui U.

Pentru a dovedi aceasta, să presupunem întîi că K este un CW-complex finit. Construim U inductiv, după scheletele lui K. Alegem $U^0 = A$ şi fie $r_0 : U^0 \times I \longrightarrow A$, $r_0(a,t) = a$. Presupunem că pentru $k < n$ avem deja construite:

(1) o mulţime U^k care este deschisă în $A \cup K^k$, încît $A \subset U^k$ şi $\overline{U^k} \subset V^k = V \cap (A \cup K^k)$, unde U^k este închiderea lui U^k şi astfel încît $U^k \cap (A \cup K^{k-1}) = U^{k-1}$;

(2) o retracţie tare de deformare $r_k : U^k \times I \longrightarrow A$, încît $r_k(x,0) = r_k(x,t)$, $0 \leq t \leq 2^{-k}$ şi $r_k / U^{k-1} \times I = r_{k-1}$.

Acum, pentru o n-celulă $\phi_\alpha^n(E^n)$ (deoarece V este deschisă, $V \cap \phi_\alpha^n(E^n)$ este deschisă în $\phi_\alpha^n(E^n)$ şi $(\phi_\alpha^n)^{-1}(V) = V_\alpha^n$ este deschisă în E^n. Mai mult, $(\phi_\alpha^n)^{-1}(U^{n-1}) \subset (\phi_\alpha^n)^{-1}(V^{n-1}) = (\phi_\alpha^n)^{-1}(V^n) \cap S^{n-1}$ şi $\overline{(\phi_\alpha^n)^{-1}(U^{n-1})} \subset (\phi_\alpha^n)^{-1}(\overline{U^{n-1}}) \subset V_\alpha^n \cap S^{n-1}$. Apoi, $(\phi_\alpha^n)^{-1}(U^{n-1})$ şi $E^n - V^n$ sînt mulţimi compacte şi disjuncte în spaţiul metric E^n şi fie distanţa dintre aceste $4d_\alpha$ (este pozitivă dacă $(\phi_\alpha^n)^{-1}(U^{n-1}) \neq \phi$).

Fie $W_\alpha^n = \{ x \in E^n / x = (1-s)z, z \in (\phi_\alpha^n)^{-1}(U^{n-1}) \text{ şi } 0 \leq s \leq d_\alpha \}$ pentru $(\phi_\alpha^n)^{-1}(U^{n-1}) \neq \phi$ şi $W_\alpha^n = \phi$ în caz contrar. Atunci, $W_\alpha^n \subset \overline{W}_\alpha^n \subset V_\alpha^n$ şi W_α^n poate fi deformată radial pe $(\phi_\alpha^n)^{-1}(U^{n-1})$ (deoarece centrul discului E^n, $0 \in \overline{W}^n$). Putem alege,

de exemplu, $r^n_\alpha : W^n_\alpha \times [0,2^{-n+1}] \longrightarrow W^n_\alpha$, definită prin: $r^n_\alpha(x,t)=x$, dacă $0 \leq t \leq 2^{-n}$; $r^n_\alpha(x,t)=(2-2^n t)x+(2^n t-1)(x/\|x\|)$, dacă $2^{-n} \leq t \leq 2^{-n+1}$.

Fie acum $U^n_\alpha = \phi^n_\alpha(W^n)$ şi definim $U^n=U^{n-1} \cup (\bigcup_\alpha U^n_\alpha)$. Atunci avem $U^n \subset \bar{U}^n \subset V^n$ şi U^n este deschisă în $A \cup K^n$ deoarece $U^n \cap (A \cup K^{n-1}) = U^{n-1}$ este deschisă în K^{n-1} şi $U^n \cap \phi^n_\alpha(E^n)$ este deschisă în $\phi^n_\alpha(E^n)$, întrucît $(\phi^n_\alpha)^{-1}(U^n)=W^n_\alpha$, care este deschisă în E^n. Definim acum aplicaţia $r_n : U^n \times I \longrightarrow A$, prin: $r_n(x,t)=\phi^n_\alpha\, r^n_\alpha((\phi^n_\alpha)^{-1}(x),t)$ pentru $0 \leq t \leq 2^{-n+1}$ şi $x \in \phi^n_\alpha(E^n)$ şi $r_n(x,t)=r_{n-1}(r_n(x,2^{-n+1}),t)$, pentru $2^{-n+1} \leq t \leq 1$. Atunci r_n este o retracţie tare de deformare a lui U^n pe A, încît $r_n/U^{n-1} \times I = r^{n-1}$ şi $r_n(x,t)=r_n(x,0)$, pentru $0 \leq t \leq 2^{-n}$.

Să presupunem acum un CW-complex oarecare K. Pentru fiecare celulă $\phi^n_\alpha(E^n_\alpha)$ există un subcomplex finit $c(\phi^n_\alpha(E^n))$ al lui K care o conţine (Propoziţia 7.3.6). Dacă o asemenea celulă intersectează pe A, atunci din cele de mai sus există există o mulţime relativ deschisă U_α şi o retracţie $r_\alpha : U_\alpha \times I \longrightarrow A \cap c(\phi^n_\alpha(E^n))$. Din construcţia de mai sus se constată că pentru orice celulă $\phi^r_\beta(E^r)$ a lui $c(\phi^n_\alpha(E^n))$, mulţimea $U_\alpha \cap \phi^r_\beta(E^r)$ depinde numai de dimensiunea r, construcţia lui U_α pe celulele lui $c(\phi^r_\beta(E^r))$ şi $V \cap \phi^r_\beta(E^r)$. Deci pe intersecţia $c(\phi^n_\alpha(E^n)) \cap c(\phi^m_\beta(E^m))$, avem $U_\alpha \cap c(\phi^n_\alpha(E^n)) \cap c(\phi^m_\beta(E^m)) = U_\beta \cap c(\phi^n_\alpha(E^n)) \cap c(\phi^m_\beta(E^m_\beta))$ şi r_α, r_β se restrîng la acelaşi retracţie tare de deformare a acestei vecinătăţi deschise pe $A \cap c(\phi^n_\alpha(E^n)) \cap c(\phi^m_\beta(E^m))$. Astfel $U=\bigcup_\alpha U_\alpha$, are proprietatea că $A \subset U \subset V$ şi $r : U \times I \longrightarrow A$, $r/U_\alpha \times I = r_\alpha$ este o funcţie. Deoarece putem presupune că toate celulele lui K intersectează pe A (altfel ne referim la subcomplexul format din acestea, care constituie o vecinătate închisă pentru A), rezultă că r este continuă şi deci o retracţie de deformare a lui U în A.

Avînd construit acum $r_n : U^n \times I \longrightarrow A$, definim $U=\bigcup_n U^n$ şi $r : U \times I \longrightarrow A$, $r/U^n \times I = r_n$.

Fie acum $a \in K$. Dacă $a \in K^0$, atunci a este un subcomplex şi, conform celor de mai sus, K este local contractibil în a. Dacă $a \in \bar{K}^0$, vom arăta:

(a_2): Există o structură de CW-complex al lui K în care a este o celulă: Fie $a \in \phi_\alpha^n(e^n)$. Dacă $n=0$ nu este nimic de demonstrat, iar dacă $n=1$ se mai adaugă celula a şi $\phi_\alpha^{-1}(E^1)$ se divide în două. Presupunem că pentru orice $y \in K^{n-1}$ există o subdivizare K' a lui K, încît y este o 0-celulă în K'. Fie $y \in \phi_\alpha^n(E^n - e^n)$. Putem presupune că $\phi_\alpha^n(0) = a$ şi fie $\bar{y} \in S^{n-1}$, încît $\phi_\alpha^n(\bar{y}) = y$. Fie $\varphi^0 : E^0 \longrightarrow a \in K$ şi $\varphi^1 : I \longrightarrow K$, $\varphi^1(t) = \phi_\alpha^n(ty)$. Fie $\psi' : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ $\psi'(x_1, \ldots, x_n) = (2x_1x_n, 2x_2x_n, \ldots, 2x_{n-1}x_n, 1-2x_n^2)$, pentru $x_n \geq 0$ şi $\psi'(x_1, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, -1)$, pentru $x_n \leq 0$. Atunci, folosind coordonatele polare (t,z) în E^n, unde $t \in I$ şi $z \in S^{n-1}$, definim $\psi : E^n \longrightarrow E^n$, prin $\psi(t,z) = t\,\psi'(z)$. Aceasta permite să definim $\psi^n : E^n \longrightarrow K$, prin $\psi^n = \phi_\alpha^n \psi$. Considerăm atunci CW-complexul K^*, cu $K^{*m} = K^m$, $m \neq 0, 1, n$ şi $K^{*0} = K'^0 \cup \{a\}$, $K^{*1} = K'^1 \cup \{\varphi^1(I)\}$, $K^{*n} = \{K'^n - \phi_\alpha^n(E^n)\} \cup \{\psi^n(E^n)\}$. Acesta este un CW-complex, cu acelaşi spaţiu ca şi K şi în care a este un vîrf. Conform celor de mai sus, K^* este local contractibil în a, deci K are această proprietate.

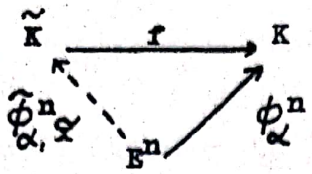
(b): Un spaţiu contractibil este liniar conex şi simplu conex, astfel că orice punct a K are o vecinătate contractibilă, conţinută într-o vecinătate prescrisă a lui a.

7.15. Fie K un CW-complex şi fie $\tilde{K}$ acoperirea sa universală cu aplicaţia de acoperire $f : \tilde{K} \longrightarrow K$ (Vezi Exerciţiul 6.25). Atunci $\tilde{K}$ este de asemenea un CW-complex.

Rezolvare: Mai întîi, deoarece f este un homeomorfism local, $\tilde{K}$ este spaţiu Hausdorff.

Fie apoi $\phi_\alpha^n : E^n \longrightarrow K$, o aplicaţie caracteristică pentru K şi fie $x \in \phi_\alpha^n(E^n)$, adică $x = \phi_\alpha^n(t)$, $t \in E^n$.

Considerăm diagrama



Dacă $\tilde{x}\in\tilde{K}$, încît $f(\tilde{x})=x$ şi deoarece $(\phi^n_\alpha)_*(\pi_1(E^n))=0$, rezultă, din Exerciţiul 6.23, că există o aplicaţie continuă (şi numai una), $\tilde{\phi}^n_{\alpha,\tilde{x}}:E^n\longrightarrow\tilde{K}$, astfel încît $\tilde{\phi}^n_{\alpha,\tilde{x}}(0)=\tilde{x}$ şi $f\circ\tilde{\phi}^n_{\alpha,\tilde{x}}=\phi^n_\alpha$. Vom arăta că $\{\tilde{\phi}^n_{\alpha,\tilde{x}}\}_{\tilde{x},\alpha,n}$ este o mulţime de aplicaţii caracteristice pentru o CW-descompunere a lui K. Verificăm condiţiile din Definiţia 7.3.1.

(a) Dacă $\tilde{x}\in\tilde{K}$, atunci $\tilde{x}\in\tilde{\phi}^n_{\alpha,\tilde{x}}(e^n)$ şi deci $K=\bigcup\phi^n_{\alpha,\tilde{x}}(e^n)$.

(b) Dacă $x\in\tilde{\phi}^n_{\alpha,\tilde{x}_1}(e^n)\cap\tilde{\phi}^m_{\beta,\tilde{x}_2}(e^m)$, atunci $\tilde{x}=\phi^n_{\alpha,\tilde{x}_1}(t_1)=\tilde{\phi}^m_{\beta,\tilde{x}_2}(t_2)$, pentru $t_1\in e^n$, $t_2\in e^m$. Avem $f(\tilde{x})=\phi^n_\alpha(t_1)=\phi^m_\beta(t_2)$ şi prin urmare, $f(\tilde{x})\in\phi^n_\alpha(e^n)\cap\phi^m_\beta(e^m)$, care implică $m=n$ şi $\alpha=\beta$, deci $t_1=t_2$. Avem apoi $f\circ\phi^n_{\alpha,\tilde{x}_1}=\phi^n_\alpha=f\circ\tilde{\phi}^n_{\alpha,\tilde{x}_2}$ şi în plus, $\tilde{\phi}^n_{\alpha,\tilde{x}_1}(t_1)=\tilde{\phi}^n_{\alpha,\tilde{x}_2}(t_2)=\tilde{x}$. In baza proprietăţii de unică ridicare, se obţine $\tilde{\phi}^n_{\alpha,\tilde{x}_1}=\tilde{\phi}^n_{\alpha,\tilde{x}_2}$. Apoi, deoarece $f\circ\tilde{\phi}^n_{\alpha,\tilde{x}}=\phi^n_\alpha$ şi ϕ^n_α/e^n este bijecţie (pe imagine), rezultă că şi $\tilde{\phi}^n_{\alpha,\tilde{x}}/e^n$ este bijecţie (pe imagine).

(c) Avem $\tilde{K}^n=\bigcup_{\substack{0\le m\le n\\ \alpha\in A_m,\tilde{x}\in\tilde{K}}}\tilde{\phi}^m_{\alpha,\tilde{x}}(e^m)$ şi rezultă imediat că avem $f(\tilde{K}^n)=K^n$. Ţinînd seama şi de relaţiile $\phi^n_\alpha(S^{n-1})\subset K^{n-1}$, $\forall\, n\ge 1$, $\forall\alpha\in A_n$, rezultă $\tilde{\phi}^n_{\alpha,\tilde{x}}(S^{n-1})\subset\tilde{K}^{n-1}$.

(d) Fie $\tilde{X}$ închisă în $\tilde{K}$. Atunci, deoarece $\tilde{\phi}^n_{\alpha,\tilde{x}}$ sînt continue, rezultă că $(\tilde{\phi}^n_{\alpha,\tilde{x}})^{-1}(\tilde{X})$ este închisă în E^n.

Reciproc, să presupunem că $\tilde{X}\subset\tilde{K}$, cu proprietatea că $(\tilde{\phi}^n_{\alpha,\tilde{x}})^{-1}(\tilde{X})$ este închisă în E^n, $\forall\alpha\in A_n$, $\forall\,\tilde{x}\in\tilde{K}$. Vom arăta că $\tilde{X}$ este închisă. Fie $\{U\}$ o acoperire deschisă a lui K, astfel încît orice component liniar conexă $\tilde{U}\subset f^{-1}(U)$ se aplică homeomorf pe U (eventual se micşorează U). Vom arăta că, dacă $\overline{\tilde{U}}$ este închiderea lui $\tilde{U}$, atunci

$\widetilde{X}\cap\overline{\widetilde{U}}$ este închisă. Dar aceasta implică $\widetilde{U}-\widetilde{X}=\widetilde{U}-(\widetilde{X}\cap\overline{\widetilde{U}})$ deschisă şi deci, putem presupune că $\widetilde{X}\subset\overline{\widetilde{U}}$, pentru o componentă liniar conexă $\widetilde{U}$ a lui $f^{-1}(U)$. Fie $X=f(\widetilde{X})$ şi $\phi_\alpha^n: E^n \longrightarrow K$ o aplicaţie caracteristică arbitrară. Atunci, $X\cap\phi_\alpha^n(E^n)=f(\widetilde{X}\cap f^{-1}(\phi_\alpha^n(E^n)))$. Fie $\widetilde{\phi}_{\alpha,\widetilde{x}}^n$ o aplicaţie caracteristică pentru $\widetilde{K}$, cu $f\widetilde{\phi}_{\alpha,\widetilde{x}}^n=\phi_\alpha^n$. Avem $f^{-1}(\phi_\alpha^n(E^n))=\bigcup\widetilde{\phi}_{\alpha,\widetilde{x}}^n(E^n)$. Dar, putem arăta că numai un număr finit de celule $\widetilde{\phi}_{\alpha,\widetilde{x}}^n(E^n)$ intersectează pe $\overline{\widetilde{U}}$. In adevăr, dacă $\widetilde{y}_{\alpha,\widetilde{x}}\in\widetilde{\phi}_{\alpha,\widetilde{x}}^n(E^n)\cap\overline{\widetilde{U}}$, atunci putem arăta că această mulţime este discretă. Dacă presupunem contrariul şi dacă $\widetilde{y}$ este un punct limită, atunci $f(\widetilde{y})\in\overline{U}$ şi putem presupunem (încă micşorînd pe U) că $\overline{U}\subset V$ care este cu proprietatea de produs local. Deci $\widetilde{y}$ este într-o componentă liniar conexă $\widetilde{V}$ a lui $f^{-1}(V)$. Aceasta este o contradicţie deoarece în $\widetilde{V}$ există cel mult un punct din $\{\widetilde{y}_{\alpha,\widetilde{x}}\}$. Cum $\widetilde{\phi}_{\alpha,x}^n(E^n)$ este o mulţime compactă, rezultă că mulţimea discretă de mai sus este finită. Fie deci $\widetilde{\phi}_{\alpha,\widetilde{x}_1}^n(E^n),\ldots,\widetilde{\phi}_{\alpha,\widetilde{x}_k}^n(E^n)$ celulele care intersectează pe $\overline{\widetilde{U}}$ şi fie $\widetilde{X}\cap\widetilde{\phi}_{\alpha,\widetilde{x}_i}^n(E^n)=F_i$, $i=1,\ldots,k$. Avem atunci $X\cap\phi_\alpha^n(E^n)=f(\widetilde{X}\cap f^{-1}(\phi_\alpha^n(E^n)))=$
$=f(F_1\cup\ldots\cup F_k)$.

In baza ipotezei asupra lui $\widetilde{X}$, avem că $(\widetilde{\phi}_{\alpha,x_i}^n)^{-1}(\widetilde{X})$ este închisă în E^n şi deci este compactă. Rezultă că $(\widetilde{\phi}_{\alpha,\widetilde{x}_i}^n)(\widetilde{\phi}_{\alpha,x_i}^n)^{-1}(\widetilde{X})=F_i$ sînt de asemenea compacte şi prin urmare $F_1\cup\ldots\cup F_k$ este compactă. Deducem că $X\cap\phi_\alpha^n(E^n)$ este compactă şi prin urmare este închisă. Deoarece K este un CW-complex, rezultă că X este închisă în K şi utilizînd continuitatea lui f, avem că $f^{-1}(X)$ este închisă în $\widetilde{K}$. Dar, $\widetilde{X}=\overline{\widetilde{U}}\cap f^{-1}(X)$, care arată că $\widetilde{X}$ este închisă în $\widetilde{K}$.

(e). Fie o celulă arbitrară $\widetilde{\phi}_{\alpha,x}^n(E^n)$. Avem $f\widetilde{\phi}_{\alpha,\widetilde{x}}^n(E^n)=\phi_\alpha^n(E^n)$. Atunci $\phi_\alpha^n(E^n)\subset\bigcup_{i=1}^k\phi_{\alpha_i}^{m_i}(e^{m_i})$. Fie $x_i\in\phi_{\alpha_i}^{m_i}(e^{m_i})\cap\phi_\alpha^n(E^n)$. Atunci $f^{-1}(x_i)\cap\phi_{\alpha,\widetilde{x}}^n(E^n)$ conţine doar un punct $\widetilde{x}_i$. Avem, cum se constată imediat, $\widetilde{\phi}_{\alpha,\widetilde{x}}^n(E^n)\subset\bigcup_{i=1}^k\widetilde{\phi}_{\alpha,\widetilde{x}_i}^{m_i}(e^{m_i})$.

7.16. Fie K un CW-complex n-dimensional şi fie L un subcomplex care conţine K^{n-1} $(n \geq 2)$. Fie mulţimile de indici pentru K şi L respectiv A_r şi B_r şi fie ϕ_α^r aplicaţiile caracteristice. Să se arate că $\phi_*^n : \bigoplus_{A_n - B_n} \pi_n(E_\alpha^n, S_\alpha^{n-1}) \longrightarrow \pi_n^*(K,L)$ este surjecţie.

Rezolvare. Facem observaţia că un rezultat similar, pentru $\pi_n(K,L)$, este demonstrat în Teorema 7.4.15, în ipoteza că perechea (K,L) este n-simplă. Aici s-a renunţat la această condiţie, în schimb se consideră grupul $\pi_n^*(K,L)$. Din Exerciţiul 7.4 acesta este în corespondenţă biunivocă cu clasele de omotopie de aplicaţii (nepunctate) $(I^n, \partial I^n) \longrightarrow (K,L)$ şi produsul este definit ca în Propoziţia 7.2.15. Fie o asemenea aplicaţie $f:(I^n, \partial I^n) \longrightarrow (K,L)$. Atunci, prin Teorema 7.4.15, avem $f \simeq g$, pentru $g:(I^n, \partial I^n) \longrightarrow (K,L)$ încît, cu notaţiile din Teorema 7.4.15, avem $g(M^{n-1}) \subset K-V$ şi orice n-celulă a lui M este aplicată prin g în K-V sau într-un U_α. Amintim că M este o CW-descompunere a lui I^n. Deoarece incluziunea $i:(K,K-V) \longrightarrow (K,L)$ este o echivalenţă omotopică (vezi demonstraţia Teoremei 7.4.15, pg.296), putem identifica $\pi_n^*(K,L)$ cu $\pi_n^*(K,K-V)$. Astfel prin iterarea construţiei din Exemplul 7.2.17, $[g] \in \pi_n^*(K,K-V)$ este o sumă de elemente, fiecare din acestea fiind situat în imaginea homomorfismului indus de o incluziune $(\Psi_\alpha, W_\alpha) \longrightarrow (K,K-V)$. Întrucît deformarea lui K-V pe L aplică W_α în $\phi_\alpha^n(S^{n-1})$, rezultă că $[g] \in \pi_n^*(K,L)$ este o sumă de elemente, fiecare situat în imaginea unui homomorfism $(\phi_\alpha^n)_* : \pi_n(E_\alpha^n, S_\alpha^{n-1}) \longrightarrow \pi_n^*(K,L)$ şi deci ϕ_*^n este epimorfism.

7.17. Fie $f:X \longrightarrow Y$ o aplicaţie astfel încît $f_{\#}:\pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ este o corespondenţă biunivocă şi $f_{\#}:\pi_r(X,x_0) \longrightarrow \pi_r(Y,f(x_0))$ este un izomorfism pentru $r<n$ şi epimorfism pentru $r=n$, pentru toate punctele $x_0 \in X$. Să se arate că, pentru orice CW-complex K, aplicaţia $f_{\#}:[K,X] \longrightarrow [K,Y]$ este o bijecţie dacă dim $K < n$ şi este surjecţie dacă dim $K=n$.

Rezolvare. După Propoziţia 6.5.5 aplicaţia f se poate scrie sub forma hg, unde $g:X \longrightarrow M_f$ este incluziune (este şi o cofibrare) şi h este echivalenţă omotopică. Putem presupune astfel că f este chiar o incluziune, deoarece avem $f_{\#}=h_{\#}g_{\#}$ şi $h_{\#}$ este bijecţie, astfel încît dacă $g_{\#}$ este bijecţie (surjecţie), la fel este $f_{\#}$. Ca în demonstraţia Teoremei 7.5.2, se arată că dacă avem $K=K^n$, atunci $f:K\times 0 \longrightarrow X$ se poate extinde la o aplicaţie $f:K\times I \longrightarrow X$, astfel că $f(K\times 1)\subset Y$. Mai mult, dacă L este un subcomplex al lui K, încît $f(L)\subset Y$, atunci $f(L\times I)\subset Y$. Dat un asemenea subcomplex L, notăm $M^r=K^r\cup L$ $(r=0,1,\ldots,n)$. Extindem f ca omotopie constantă la $(K\times 0)\cup(L\times I)$. Dacă x este o 0-celulă în M^0-L, există un drum $u:I \longrightarrow X$ încît $u(0)=f(x,0)$ şi $u(1)\in Y$. Putem defini f pe $M^0\times I$, luînd $f(x,t)=u(t)$. Presupunem acum că f a fost extinsă la $(K\times 0)\cup(M^{r-1}\times I)$, astfel încît $f(M^{r-1}\times 1)\subset Y$. Pentru orice r-celulă $\phi^r_\alpha(E^r)$ din $K-L$, se poate aplica construcţia din Teorema 7.5.2, deoarece $\pi_r(X,Y)=0$, pentru $1 \le r \le n$ şi se extinde f la $\phi^r_\alpha(E^r)$, pentru $\forall \alpha \in A_r$. Lipind acestea se obţine o aplicaţie continuă $f:M^r\times I \longrightarrow X$, astfel încît avem $f:(K\times 0)\cup(M^r\times I) \longrightarrow X$, cu $f(M^r\times 1)\subset Y$. Aceasta arată că aplicaţia $f_{\#}:[K,X] \longrightarrow [K,Y]$ este surjecţie dacă avem $K=K^n$. Să presupunem acum că avem $K=K^{n-1}$. Să arătăm că $f_{\#}$ este injectivă.

Fie $[g],[h] \in [K,X]$, astfel încît $f_*([g])=f_*([h])$, adică $fg \simeq fh$ şi fie omotopia (cu punct bază) $F: K \times I \longrightarrow X$, dintre acestea. $K \times I$ este un CW-complex, $L=K \times 0 \cup K \times 1 \cup k_0 \times I$ este un subcomplex al lui $K \times I$ şi $F(L) \subset Y$. Atunci F se poate extinde la o aplicaţie $G: K \times I \times I \longrightarrow X$, încît $G(K \times I \times 1) \subset Y$, $G/L \times I$ este o omotopie constantă. Atunci $G/K \times I \times 1$ este o omotopie (cu punct bază) între g şi h, adică $[g]=[h]$ şi deci f_* este injectivă.

7.18. Fie K un CW-complex şi n un întreg pozitiv. Să se arate că există un spaţiu X şi o aplicaţie $f: X \longrightarrow K$, astfel încît

(a) $\pi_r(X)=0$ pentru $r<n$,

(b) $f_*: \pi_r(X) \longrightarrow \pi_r(K)$ este izomorfism pentru $r \geq n$

Rezolvare. Deoarece grupurile de omotopie depind numai de componenta liniar conexă a punctului bază, putem presupune că spaţiul K este liniar conex.

Pentru $n=1$ este evident că putem lua $X=K$ şi $f=Id_X$.

Presupunem $n \geq 2$. Pentru $r \geq n$, $\pi_r(K)$ este un grup abelian cu generatorii I_r şi relaţiile J_r, deci $\pi_r(K)=Ab\{I_r;J_r\}$.

Fie acum $M_r=\bigvee_{x \in I_r} S^r_x$, unde S^r_x este o copie a sferei S^r. Avem atunci, $\pi_r(M_r)=Ab\{I_r\}$. Dacă $x \in I_r$, notăm prin x elementul corespunzător în $\pi_r(K)$ şi fie $f_x: S^r \longrightarrow K$, astfel încît $[f_x]=\tilde{x} \in \pi_r(K)$.

Vom construi acum, prin inducţie, spaţiile L_k şi aplicaţiile $h_k: L_k \longrightarrow K$, pentru $k \geq n$, astfel încît :

(i) $L_n=K_n$;

(ii) $(h_k)_*: \pi_r(L_k) \longrightarrow \pi_r(K)$, sînt izomorfisme pentru $n \leq r < k$ şi surjecţii pentru $r=k$;

(iii) Fiecare L_k este un CW-complex de dimensiune k şi L_{k+1} se obţine din L_k prin adjuncţie de celule de dimensiune $(k+1)$, iar $h_{k+1}/L_k=h_k$.

Pentru k=n, luăm $L_n=M_n$ şi $h_n:M_n \longrightarrow K$ să fie compunerea

$\bigvee_{x\in I_n} S^n_x \xrightarrow{\bigvee f_x} M_k \xrightarrow{\nabla} K$, unde ∇ este aplicaţia de foliere (pg.205). Se verifică imediat condiţiile (ii) şi (iii).

Să presupunem că am construit $L_n, L_{n+1}, \ldots, L_k$ şi $h_n, \ldots, h_k$, încît să fie satisfăcute condiţiile (ii) şi (iii). Pentru a construi spaţiul L_{k+1} şi aplicaţia h_{k+1}, pentru orice element din $\mathrm{Ker}(h_k)_* \subset \pi_k(L_k)$, fie un reprezentant $g:S^k \longrightarrow L_k$. Ataşăm atunci celula E^{k+1} la L_k, cu ajutorul aplicaţiei g. Luînd toate elementele g corespunzătoare lui $\mathrm{Ker}(k_k)_* \subset \pi_k(L_k)$, obţinem un spaţiu L'_{k+1}. Considerînd aplicaţia $h_k g:S^k \longrightarrow K$, avem $(h_k)_*[g]=0$ şi deci aceasta se poate extinde la E^{k+1}. Cu ajutorul acestei extinderi, construim o aplicaţie continuă $h'_{k+1}:L'_{k+1} \longrightarrow K$, astfel încît $h'_{k+1}/L_k = h_k$.

Atunci $(h'_{k+1})_*:\pi_k(L'_{k+1}) \longrightarrow \pi_k(K)$ este un izomorfism (este un homomorfism injectiv şi surjectiv).

Fie acum $L_{k+1}=L'_{k+1} \vee M_{k+1}$ şi luăm h_{k+1} ca fiind compunerea

$L'_{k+1} \vee M_{k+1} \xrightarrow{h'_{k+1} \vee (\vee f_-)} K \vee (\vee K) \longrightarrow K$

Atunci L_{k+1} este un CW-complex de dimensiune k+1 şi avînd scheletul $(L_{k+1})^k=(L'_{k+1})^k=L_k$. Prin urmare, L_{k+1} este obţinut din L_k prin adjuncţie de (k+1)-celule. Avem de asemenea $h_{k+1}/L_k=h'_{k+1}/L_k=h_k$. Proprietatea (ii) se verifică imediat.

Am construit deci CW-complexele L_k cu proprietăţile enunţate.

Construim acum un spaţiu celular X, cu $X^k=L_k$, pentru $k \geqslant n$ şi $X^k=(L_n)^k=(M_n)^k=$ pct., pentru $k<n$. Se poate considera aplicaţia continuă $h:X \longrightarrow K$, definită prin $h/X^k=h_k$, $k \geqslant n$.

După Teorema 7.4.17, pentru $r<n$, $\pi_r(X)=\pi_r(X^n)=\pi_r(L_n)=\pi_r(M_n)=0$, iar pentru $r \geqslant n$, $h_*:\pi_r(X) \longrightarrow \pi_r(K)$ este izomorfism, deoarece $(h_{r+1})_*:\pi_r(X^{r+1})=\pi_r(L_{r+1}) \longrightarrow \pi_r(K)$ este izomorfism.

7.19. Se defineşte $f:S^n \longrightarrow RP^n$ prin $f(x_1,\dots,x_{n+1}) = [x_1,\dots,x_{n+1}]$.

(a). Să se arate că f este un produs local cu fibra S^0. Să se utilizeze aceasta pentru a arăta că RP^n are aceleaşi grupuri de omotopie ca şi S^n, exceptînd $\pi_1(RP^n) \cong Z_2$ $(n > 1)$.

(b). Să se arate, în mod analog, că există un produs local $S^{2n+1} \longrightarrow CP^n$, cu fibra S^1 şi un produs local $S^{4n+3} \longrightarrow HP^n$, cu fibra S^3. Să se deducă de aici că $\pi_r(CP^n) \cong \pi_r(S^{2n+1})$ (excepţie $\pi_2(CP^n) \cong Z$) şi că $\pi_r(HP^n) \cong \pi_r(S^{4n+3}) \oplus \pi_{r-1}(S^3)$.

(c). Să se arate că $\pi_r(S^3) \cong \pi_r(S^2)$, $r \geq 3$ şi că $\pi_r(S^4) \cong \pi_r(S^7) \oplus \pi_{r-1}(S^3)$.

Rezolvare:

(a). Fie $b=[x_1,\dots,x_{n+1}] \in RP^n$. Fie $x=(x_1,\dots,x_n)$ şi fie U' o vecinătate deschisă a lui x, cu proprietatea că dacă $s:S^n \longrightarrow S^n$ este simetria faţă de origine $(s(y)=-y)$, atunci $U' \cap s(U') = \phi$. Deoarece f este o aplicaţie de identificare şi $f^{-1}(f(U')) = U' \cup s(U')$ şi s este homeomorfism, rezultă că $U=f(U')$ este deschisă în RP^n şi este vecinătate a lui b. Avem homeomorfismul $h_U: U \times S^0 \longrightarrow f^{-1}(U) = U' \cup s(U')$, $h_U(x,-1) = h_U(f(x'),-1) = x'$, dacă $x' \in U'$ şi $h_U(x,1) = h_U(f(x'),1) = -x'$, $x' \in U'$. Avem $h_U/U \times \{-1\} \longrightarrow U'$ şi $h_U/U \times \{1\} \longrightarrow s(U')$ homeomorfisme şi rezultă, deoarece $(U \times \{-1\}) \cap (U \times \{1\}) = \phi$ şi $U' \cap s(U') = \phi$, că h_U este un homeomorfism. Avem apoi $fh_U(f(x'),-1) = f(x')$ şi $fh_U(f(x'),1) = f(-x') = f(x')$. Astfel $f:S^n \longrightarrow RP^n$ este un produs local (vezi Exerciţiul 6.19). Rezultă că f este o fibrare Serre şi, după Exerciţiul 6.18, avem şirul exact

$$\dots \longrightarrow \pi_k(S^0) \longrightarrow \pi_k(S^n) \longrightarrow \pi_k(RP^n) \longrightarrow \pi_{k-1}(S^0) \longrightarrow \dots$$

Din acesta obţinem, pentru $k \geq 2$, $\pi_k(S^n) \cong \pi_k(RP^n)$. Pentru k=1, avem $0 \longrightarrow \pi_1(RP^n) \longrightarrow \pi_0(S^0) \longrightarrow 0$ şi $\pi_0(S^0)$ este o mulţime cu două elemente. Rezultă că $\pi_1(RP^n) \cong Z_2$.

(b) După Exercițiul 7.8, avem o aplicație de identificare $p:S^{2n+1} \longrightarrow CP^n$, $p(z_1,\dots,z_{n+1})=[z_1,\dots,z_{n+1}]$. Să arătăm că p este un produs local. Fie acoperirea lui S^{2n+1} cu mulțimi deschise U', cu proprietatea că $\forall\, z \in S^1$, $zU' \cap U' = \phi$. Atunci $p^{-1}(p(U')) = \bigcup_{z \in S^1} zU'$ și deoarece p este o aplicație de identificare, rezultă că $p(U')=U$ este deschisă. Avem $z_1U' \cap z_2U' \neq \phi$ dacă $z_1 \neq z_2$. Putem defini homeomorfismul

$h_U: U \times S^1 \longrightarrow p^{-1}(p(U')) = \bigcup_{z \in S^1} zU'$, prin $h_U(x,z)=zx'$.

Se verifică $ph_U(x,z)=p(zx')=p(x')=x$, pentru $x=p(x')$, cu $x' \in U'$.

Rezultă că $p:S^{2n+1} \longrightarrow CP^n$ este un produs local. Este deci fibrare Serre și scriind șirul exact de omotopie al acestei avem:

$$\dots \longrightarrow \pi_k(S^1) \longrightarrow \pi_k(S^{2n+1}) \longrightarrow \pi_k(CP^n) \longrightarrow \pi_{k-1}(S^1) \longrightarrow \dots$$

Pentru $k \geq 3$, avem $\pi_k(S^{2n+1}) \cong \pi_k(CP^n)$. Pentru $k=2$, obținem

$0 \longrightarrow \pi_2(CP^n) \longrightarrow \pi_1(S^1) \longrightarrow 0$, care implică $\pi_2(CP^n) \cong Z$.

Mai avem $\pi_1(CP^n)=0$.

Pentru HP^n avem o aplicație de identificare $p:S^{4n+3} \longrightarrow HP^n$ și se procedează ca mai sus, considerînd o acoperire deschisă a sferei S^{4n+3} cu mulțimi deschise U', satisfăcînd condiția $hU' \cap h_1U' = \phi$, pentru $h,h_1 \in S^3$, cu $h \neq h_1$. Atunci $p(U')$ sînt deschise în HP^n și pentru $U=p(U')$, avem $p^{-1}(U)=\bigcup_{h \in S^3} hU'$ și există un homeomorfism $h_U: U \times S^3 \longrightarrow p^{-1}(U)$.

Scriind șirul exact de omotopie al acestei fibrări Serre, avem:

$$\dots \longrightarrow \pi_k(S^3) \xrightarrow{i_*} \pi_k(S^{4n+3}) \xrightarrow{p_*} \pi_k(HP^n) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{k-1}(S^3) \xrightarrow{i_*} \dots$$

unde $i:S^3 \longrightarrow S^{4n+3}$ este incluziunea. Deoarece $\pi_3(S^{4n+3})=0$ $(n \geq 1)$, rezultă că i este omotopă cu o aplicație constantă și deci $i_*=0$. Rezultă că $\operatorname{Im} i_*=0$ și prin urmare $\operatorname{Ker} p_*=0$ și $\operatorname{Im} \partial_* = \pi_{k-1}(S^3)$. Obținem astfel șirul exact

$$0 \longrightarrow \pi_k(S^{4k+3}) \xrightarrow{p_*} \pi_k(HP^n) \longrightarrow \pi_{k-1}(S^3) \longrightarrow 0$$

Acesta este de fapt o parte din şirul exact de omotopie al perechii (S^{4k+3}, S^3) şi aplicînd Exerciţiul 7.5 (e), rezultă că este scindat. Obţinem prin urmare

$$\pi_k(HP^n) \cong \pi_k(S^{4n+3}) \oplus \pi_{k-1}(S^3) \; .$$

(c) Avem CP^1 homeomorf cu S^2 şi HP^1 homeomorf cu S^4. Avem deci $\pi_r(S^4) \cong \pi_r(S^7) \oplus \pi_{r-1}(S^3)$ şi $\pi_r(CP^1) = \pi_r(S^2) \cong \pi_r(S^3)$, dacă $r \geq 3$.

7.20. Fie G un grup topologic (vezi Exerciţiul 3.10) şi considerăm aplicaţia $p: G \times G \times I \longrightarrow G \times I$ definită prin $p(g,h,t) = (gh,t)$. Să se arate că p induce un produs local $q: G * G \longrightarrow SG$, cu fibra G, în ipoteza că G este Hausdorff local compact. Considerînd S^1 şi S^3 respectiv ca numerele complexe şi cuaternionii de modul 1, să se arate că S^1 şi S^3 sînt grupuri topologice. De aici să se deducă existenţa produselor locale $S^3 \longrightarrow S^2$ cu fibra S^1 şi $S^7 \longrightarrow S^4$ cu fibra S^3.

Rezolvare. Uniunea $G * G$ (vezi Exerciţiul 6.3) este spaţiul obţinut din $G \times G \times I$ identificînd $(x,y,0)$ cu $(x,e,0)$ şi $(x,y,1)$ cu $(e,y,1)$, $\forall x,y \in G$, e fiind elementul neutru. Definim aplicaţia $q: G * G \longrightarrow SG$ prin $q(\widehat{g,h,t}) = (\widetilde{gh,t})$. In adevăr, din $(\widehat{g,h,0}) = (\widehat{g,e,0})$ obţinem $(\widetilde{gh,0}) = (\widetilde{g,0}) = (\widetilde{e,0})$ şi din $(\widehat{g,h,1}) = (\widehat{e,h,1})$, avem $(\widetilde{gh,1}) = (\widetilde{h,1}) = (\widetilde{e,1})$. Aplicaţia q face diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times I & \xrightarrow{\;p\;} & G \times I \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ G * G & \xrightarrow{\;q\;} & SG \end{array}$$

în care π_1 şi π_2 sînt aplicaţii de identificare. Rezultă că aplicaţia q este surjectivă şi continuă. Să arătăm că este un produs local. Fie $U = \pi_2(G \times [0,1))$ şi $V = \pi_2(G \times (0,1])$. Să arătăm că U şi V sînt deschise în SG. Mai întîi $G \times [0,1)$ şi

$G \times (0,1]$ sînt deschise în $G \times I$. Apoi, $(g,t) \in \pi_2^{-1}(U)$, implică $(\widetilde{g,t}) = (\widetilde{g',t'})$, cu $(g',t') \in G \times (0,1]$. Rezultă sau $(g,t) = (g',t')$ sau $t = t' = 0$. Obţinem astfel că $\pi_2^{-1}(U) = G \times (0,1]$ şi deci, π_2 fiind o aplicaţie de identificare, U este deschisă. In mod analog, avem $\pi_2^{-1}(V) = G \times (0,1]$, deci şi V este deschisă. Este clar că U, V constituie o acoperire pentru SG. Avem apoi $q^{-1}(U) = \pi_1(G \times G \times (0,1])$. Definim $h_U : U \times G \longrightarrow q^{-1}(U)$, prin $h_U((\widetilde{g,t}),h) = (\widehat{gh^{-1},h,t})$. Din $(\widetilde{g,0}) = (\widetilde{e,0})$, obţinem $(\widehat{gh^{-1},h,0}) = (\widehat{gh^{-1},e,0})$, h_U este bine definită. Se verifică uşor că este o bijecţie. Avem apoi relaţia $h_U(\pi_2 \times 1) = \pi_1 \varphi$, unde $\varphi : G \times I \times G \longrightarrow G \times G \times I$ este homeomorfismul $\varphi(g,t,h) = (gh^{-1},h,t)$, G fiind spaţiu Hausdorff local compact, aplicaţia $\pi_2 \times 1$ este aplicaţie de identificare şi rezultă astfel că h_U este continuă. Aceasta are inversa $k_U : q^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$, $k_U(\widehat{g,h,t}) = ((\widetilde{g,t}),h)$, care satisface relaţia $k_U \pi_1 = (\pi_2 \times 1)\varphi^{-1}$ şi deci este continuă. Astfel h_U este un homeomorfism. In sfîrşit, $qh_U((\widetilde{g,t}),h) = q(\widehat{gh^{-1},h,t}) = (\widetilde{g,t})$. Pentru V se verifică proprietăţi similare. Astfel q este un produs local.

Faptul că S^1 şi S^3 sînt grupuri topologice rezultă în mod evident Luînd atunci $G = S^1$ în consideraţiile de mai sus, deducem că există un produs local $q : S^1 * S^1 \longrightarrow S(S^1)$ şi un produs local $q : S^3 * S^3 \longrightarrow S(S^3)$. Dar $S^1 * S^1 \simeq S^3$, $S^3 * S^3 \simeq S^7$, $S(S^1) \simeq S^2$ şi $S(S^3) \simeq S^4$. Am aplicat aici Exerciţiul 6.3 (b), anume $S^1 * S^1 \simeq s(S^1 \wedge S^1)$ şi $S^3 * S^3 \simeq s(S^3 \wedge S^3)$.

7.21. (a). Fie G un grup topologic, exceptînd asociativitatea, care se înlocuieşte prin $(gh)h^{-1} = g$, pentru $\forall\, g,h \in G$. Să se arate că, dacă G este un spaţiu Hausdorff local compact, atunci aplicaţia $q : G * G \longrightarrow SG$ (vezi exrciţiul precedent), este un produs local.

(b). Numerele Cayley sînt elemetele grupului aditiv $H \oplus H$, cu H corpul cuaternionilor, în care se defineşte şi înmulţirea

$(h_1,h_2)\cdot(k_1,k_2)=(h_1k_1-\bar{k}_2h_2, k_2h_1+h_2\bar{k}_1)$. Conjugatul elementului (h_1,h_2) este $\overline{(h_1,h_2)}=(\bar{h}_1,-h_2)$. Să se arate că $(h_1,h_2)\cdot\overline{(h_1,h_2)}=(|h_1|^2+|h_2|^2,0)$, și că aceasta este $(0,0)$ dacă și numai dacă $(h_1,h_2)=(0,0)$. Se definește deci modulul $|(h_1,h_2)|=\left(|h_1|^2+|h_2|^2\right)^{1/2}$. Să se arate că numerele Cayley de modul 1 formează un grup multiplicativ, exceptînd asociativitatea, care se înlocuiește cu legea mai slabă de mai sus.

(c). Identificînd S^7 cu acest "grup", să se arate că există un produs local $S^{15}\longrightarrow S^8$, cu fibra S^7. Să se deducă de aici că

$$\pi_r(S^8)\cong\pi_r(S^{15})\oplus\pi_{r-1}(S^7).$$

Rezolvare. (a) rezultă din exercițiul precedent, unde nu s-a utilizat asociativitatea, ci doar relația $(gh)h^{-1}=g$, cînd am arătat că $qh_J((\tilde{g},t),h)=(\tilde{g},t)$.

(b). Amintim că dacă $h=a+bi+cj+dk\in H$, cu $i^2=j^2=k^2=-1$; $ij=-ji=k$, $jk=-kj=i$, $ki=-ik=j$, atunci $\bar{h}=a-bi-cj-dk$. In rest sînt calcule simple.

(c). Este iarăși evident că S^7 se identifică cu submulțimea numerelor Cayley de modul 1. Se verifică prin calcule directe că aceasta este un "grup" multiplicativ, în sensul lui (a). Avem atunci un produs local $q:S^7*S^7\longrightarrow S(S^7)$, adică $q:S^{15}\longrightarrow S^8$ cu fibra S^7. Ținînd seama că această aplicație este o fibrare Serre, putem scrie șirul exact de omotopie al acestuia

$$\cdots\pi_r(S^7)\xrightarrow{i_*}\pi_r(S^{15})\xrightarrow{q_*}\pi_r(S^8)\xrightarrow{\partial_*}\pi_{r-1}(S^7)\longrightarrow\cdots$$

Ținînd seama că $\pi_7(S^{15})=0$, deducem ca în Exercițiul 7.19, (b) șirul scindat

$$0\longrightarrow\pi_r(S^{15})\xrightarrow{q_*}\pi_r(S^8)\longrightarrow\pi_{r-1}(S^7)\longrightarrow 0.$$

I.22. Fie G un grup topologic și fie $K\subset H$ subgrupuri închise ale lui G (adică subgrupuri, care sînt subspații închise). Notăm cu G/H mulțimea claselor de echivalență la stînga modulo H, gH, topologizată astfel încît funcția cît $p:G\longrightarrow G/H$ să fie o aplicație de identificare.

Aplicația p se zice a avea o secțiune locală dacă există o vecină-

nătate deschisă U a punctului (H) în G/H şi o aplicaţie $f:U \longrightarrow G$ încît $pf=1_U$. Să se arate că dacă p are o secţiune locală, atunci aplicaţia de identificare $q:G/K \longrightarrow G/H$ este un produs local cu fibra H/K.

Rezolvare. Fie $f:U \longrightarrow G$ o secţiune locală a lui p. Atunci, pentru orice $g \in G$, mulţimea $gU \subset G/H$, $gU=\{p(gg')/g' \in U\}$ este deschisă deoarece multiplicarea este continuă şi p este aplicaţie de identificare. Apoi, gU constituie o acoperire pentru G/H cînd g parcurge G. Avem $q^{-1}(gU)=\{gg'K/g' \in U\}$ şi definim $\phi: gU \times H/K \longrightarrow q^{-1}(gU)$ prin $\phi(x,y)=g.f(g^{-1}x).y$, pentru $x \in gU, y \in H/K$. In adevăr, $x \in gU \Longrightarrow g^{-1}x \in U \Longrightarrow f(g^{-1}x) \in G \Longrightarrow gf(g^{-1}x) \in G \Longrightarrow \phi(x,y) \in G/H$. Mai mult, $q\phi(x,y)=q(gf(g^{-1}x)y) = gpf(g^{-1}x)\, q(y) = gg^{-1}x.e = x$. Aplicaţia ϕ este continuă, fiind o compunere de aplicaţii continue. Este de asemenea o bijecţie, cu inversa $\phi^{-1}: q^{-1}(gU) \longrightarrow gU \times H/K$, definită prin $\phi^{-1}(zK)=((f(g^{-1}q(z))^{-1}H, g^{-1}z\,K)$, care este de asemenea continuă. Prin urmare ϕ este un homeomorfism. Din cele de mai sus avem verificată şi condiţia $q\,\phi(x,H/K)=x$ şi deci q este un produs local, cu fibra H/K.

7.23. Grupul ortogonal O(n) este grupul matricelor reale de tipul (n x n) încît $AA^t=I$, topologizat ca un subspaţiu al lui R^{n^2}.

(A). Să se arate că O(n) este un grup topologic şi că dacă O(n-1) este privit ca subgrupul matricelor (a_{ij}) încît $a_{nn}=1, a_{in}=a_{nj}=0$, $i,j=1,\ldots,n-1$, atunci O(n-1) este un subgrup închis.

(B). Identificînd clasele la stînga modulo O(n-1) cu ultima coloană a unei matrice reprezentative din O(n), să se arate că O(n)/O(n-1) este homeomorf cu S^{n-1}. Să se arate de asemenea că aplicaţia de identificare $p:O(n) \longrightarrow S^{n-1}$ are o secţiune locală.

(C). Să se deducă de aici că următoarele aplicaţii de identificare sînt produse locale:

(a). $p:O(n) \longrightarrow S^{n-1}$, cu fibra O(n-1),

(b). $p: SO(n) \longrightarrow S^{n-1}$, cu fibra $SO(n-1)$, unde $SO(n)$ este subgrupul matricelor lui $O(n)$, care au determinantul egal cu 1.

(c). $p: V_{n,k} \longrightarrow S^{n-1}$, cu fibra $V_{n-1,k-1}$ unde $V_{n,k}=O(n)/O(n-k)$ (acest spaţiu este numit o varietate Stiefel).

Rezolvare. (A). Este clar şi bine cunoscut că mulţimea $GL(n,R)$ a matricelor inversabile de tip $(n\times n)$ este un grup topologic multiplicativ. Rezultă imediat că $O(n)$ este un subgrup topologic al acestuia. Dacă $A \in O(n-1)$, $A=(a_{ij})$, considerăm matricea $A'=(a'_{hk}) \in O(n)$, cu $a'_{ij}=a_{ij}$ şi $a'_{nn}=1, a'_{in}=a'_{nj}=0$. Atunci aplicaţia $O(n-1) \longrightarrow O(n)$, $A \longmapsto A'$ este injectivă, astfel că $O(n-1)$ poate fi privit ca submulţime (chiar ca subgrup) al grupului $O(n)$. Să arătăm că $O(n-1)$ este un subgrup închis. Considerăm aplicaţiile $\varphi_{ij}: O(n) \longrightarrow R$, $\varphi_{ij}((a_{hk}))=a_{ij}$. Acestea sînt continue şi avem $O(n-1)=\bigcap_{i=1}^{n-1} \varphi_{in}^{-1}(0) \cap \bigcap_{j=1}^{n-1} \varphi_{nj}^{-1}(0) \cap \varphi_{nn}^{-1}(1)$. Rezultă că $O(n-1)$ este submulţime închisă în $O(n)$, fiind intersecţie de mulţimi închise.

(B). Fie $A,B \in O(n)$. Dacă $A \sim B \bmod O(n-1)$, rezultă că $A^{-1}B=A'B \in O(n-1)$. Aceasta înseamnă că avem $\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{jn}=0, i=1,\dots,n-1$; $\sum_{j=1}^{n} a_{jn}b_{jk}=0, k=1,\dots,n-1$; $\sum_{j=1}^{n} a_{jn}b_{jn}=1$. De aici obţinem uşor că matricele $A=(a_{ij})$ şi $B=(b_{ij})$, au ultimele coloane egale. De asemenea dacă A şi B au aceeaşi ultimă coloană, atunci sînt verificate relaţiile de mai sus şi prin urmare $A \sim B \bmod O(n-1)$.

Astfel mulţimea $O(n)/O(n-1)$ se poate identifica cu vectorii $(a_{1n},\dots,a_{nn})$, cu proprietatea $a_{1n}^2+\dots+a_{nn}^2=1$. In adevăr, conform celor de mai sus este bine definită aplicaţia $O(n)/O(n-1) \longrightarrow S^{n-1}$, $A \longmapsto (a_{1n},\dots,a_{nn})$ şi este injectivă şi continuă. Este şi surjectivă deoarece dat $(a_{1n},\dots,a_{nn}) \in S^{n-1}$ putem considera mai întîi o matrice nesingulară, de exemplu

$$A'=\begin{pmatrix} 10\dots & a_{1n} \\ 0\,1\,\dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \\ 0\dots\,0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dacă $a_{nn} \neq 0$ şi se ortonormează vectorii coloane, după procedeul Gram-Schmidt, începînd cu ultima coloană. Se obţine o matrice ortogonală avînd vectorul dat drept ultimă coloană. Deoarece S^{n-1} şi $O(n)$ sînt spaţii compacte, rezultă că bijecţia continuă $O(n)/O(n-1) \longrightarrow S^{n-1}$ este un homeomorfism.

Fie acum proiecţia canonică $p: O(n) \longrightarrow O(n)/O(n-1) = S^{n-1}$. Să arătăm că aceasta are o secţiune locală. Fie mulţimea $U = \{x=(x_1,\ldots,x_n) \in S^{n-1} / x_n \neq -1\}$. Aceasta este deschisă în S^{n-1} şi este o vecinătate a punctului $(0,\ldots,0,1)$ identificat cu $(O(n-1))$.

Definim $f: U \longrightarrow O(n)$, prin $f(x)=(f_1,\ldots,f_n)$, unde $f_r = e_r - \frac{x_r}{1+x_n}(x+e_n)$, $1 \leq r \leq n-1$ şi $f_n = x$, unde $e_r = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ linia r şi $x=(x_1,\ldots,x_n)$.

Avem $f(x) \in O(n)$, deoarece $\langle f_r, f_s \rangle = \delta_{rs}$. De exemplu $\langle f_r, f_n \rangle = \langle e_r - \frac{x_r}{1+x_n}(x+e_n), x \rangle = x_r - \frac{x_r}{1+x_n} - \frac{x_r x_n}{1+x_n} = 0$ şi $\langle f_n, f_n \rangle = \langle x, x \rangle = 1$. Analog se verifică celelalte relaţii. Aplicaţia f este în mod evident, continuă. În sfîrşit, $pf(x) = p(f_1,\ldots,f_n) = f_n = x$. Prin urmare, f este o secţiune locală pentru $p: O(n) \longrightarrow S^{n-1}$.

(c) (a). Aplicăm, în baza celor de mai sus, Exerciţiul 7.22, pentru $G=O(n)$, $H=O(n-1)$, $K=\{I\}$ şi rezultă că $p: O(n) \longrightarrow O(n)/O(n-1) = S^{n-1}$ este un produs local cu fibra $O(n-1)$.

(b). Aplicăm 7.22, pentru $G=O(n)$, $H=O(n-1)$ şi $K=\{I,J\}$, unde

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & \ldots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Avem produsul local $O(n)/K \longrightarrow O(n)/O(n-1)$. Dar se poate stabili un homeomorfism $O(n)/K \longrightarrow SO(n)$, prin

$$AK \longmapsto \begin{cases} A, & \text{dacă } \det A = 1 \\ JA, & \text{dacă } \det A = -1 \end{cases}$$

Identificînd şi $O(n-1)/K$ cu $SO(n-1)$ rezultă un produs local

$p: SO(n) \longrightarrow S^{n-1}$, cu fibra $SO(n-1)$.

(c) Aplicăm iarăşi 7.22, pentru $G=O(n)$, $H=O(n-1)$ şi $K=O(n-k)$.

(d) Utilizînd (a) şi ţinînd seama că un produs local este o fibrare Serre, putem scrie şirul exact

$$\ldots \to \pi_{r+1}(S^n) \to \pi_r(O(n)) \to \pi_r(O(n+1)) \to \pi_r(S^n) \to \ldots$$

Pentru $r+1 < n$, deci pentru $r < n-1$, avem $\pi_r(S^n) = 0$, $\pi_{r+1}(S^n) = 0$, care implică $\pi_r(O(n)) \cong \pi_r(O(n+1))$.

În mod analog, utilizînd (b), se obţine $\pi_r(SO(n)) \cong \pi_r(SO(n+1))$, dacă $r < n-1$ şi aplicînd (c), deducem $\pi_r(V_{n+1,k+1}) \cong \pi_r(V_{n,k})$, pentru $r < n-1$ şi $k < n$.

Considerăm S^3 ca grupul topologic al cuaternionilor de modul 1 şi privim S^2 ca subspaţiul constînd din cuaternionii de forma $(0,b,c,d)$. Să se arate că, pentru orice $x \in S^3$, aplicaţia

$$y \longmapsto x.y.x^{-1}$$

este o aplicaţie liniară care aplică S^2 în ea însăşi. Să se deducă de aici că există o aplicaţie $h: S^3 \longrightarrow SO(3)$, care induce un homeomorfism între RP^3 şi $SO(3)$. Să se arate că $\pi_1(SO(n)) \cong Z_2$, $\pi_2(SO(n)) = 0$, $n \geq 3$.

Rezolvare. H este un spaţiu vectorial real de dimensiune 4 (este chiar o algebră reală). Considerăm aplicaţia $T: H \longrightarrow H$, definită prin $T(y) = x.y.x^{-1}$. Avem atunci $T(y_1+y_2) = x.(y_1+y_2)x^{-1} = x.y_1.x^{-1} + x.y_2.x^{-1} = T(y_1)+T(y_2)$ şi $T(ay) = x.(ay).x^{-1} = a(x.y.x^{-1}) = aT(y)$, $\forall a \in R$. Astfel T este o transformare liniară.

Dacă $x = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ şi $y = bi+cj+dk$, se arată prin calcul direct că $T(y)$ este de forma $b'i+c'j+d'k$. Astfel că avem, pentru orice $x \in S^3$, $T_x: S^2 \longrightarrow S^2$.

Putem defini aplicaţia $h: S^3 \longrightarrow SO(3)$, prin $h(x) = T_x/S^2$, mai precis, dacă $x = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$, atunci T_x se reprezintă matriceal prin:

$$T_x = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2 & 2(\beta\gamma-\alpha\delta) & 2(\alpha\gamma+\beta\delta) \\ 0 & 2(\alpha\delta+\beta\gamma) & \alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2 & 2(\gamma\delta-\alpha\beta) \\ 0 & 2(\beta\delta-\alpha\gamma) & 2(\alpha\beta+\gamma\delta) & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2 \end{array}\right)$$

$h(x)$ este atunci matrice $A(x)$ încadrată mai sus. Aplicaţia h este continuă. Deoarece $h(x)=h(-x)$, rezultă că se induce o aplicaţie continuă $h: RP^3 \longrightarrow SO(3)$. Apoi, dacă $h(\hat{x}_1)=h(\hat{x}_2)$, avem $x_1 y x_1^{-1} = x_2 y x_2^{-1}$, $\forall\, y \in S^2$, adică $(x_2^{-1}x_1)y(x_2^{-1}x_1)^{-1} = y$, $\forall\, y \in S^2$, care implică $x_2^{-1}x_1 = \pm 1$, adică $x_1 = \pm x_2$ şi deci $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$. Aceasta arată că h este aplicaţie injectivă. Se poate verifica prin calcul că h este şi surjectivă. Deoarece $SO(3)$ este compact, rezultă că h este un homeomorfism.

Aplicînd acum Exerciţiul 7.23 (D), avem $\pi_1(SO(n)) \cong \pi_1(SO(3))$ şi în baza homeomorfismului de mai sus $\pi_1(SO(3)) \cong \pi_1(RP^3) \cong Z_2$ (vezi Exerciţiul 7.19). Apoi $\pi_2(SO(3)) \cong \pi_2(RP^3) = 0$

Din şirul exact al fibrării $p: SO(4) \longrightarrow S^3$, cu fibra $SO(3)$, avem $0 = \pi_2(SO(3)) \longrightarrow \pi_2(SO(4)) \longrightarrow \pi_2(S^3) = 0$, deci $\pi_2(SO(4)) = 0$. In sfîrşit, din Exerciţiul 7.23, avem $\pi_2(SO(n)) \cong \pi_2(SO(4))$, $n \geq 4$. Prin urmare, $\pi_2(SO(n)) = 0$, $n \geq 3$.

7.25. Grupul unitar $U(n)$ este grupul matricelor complexe A de tip $(n \times n)$ cu proprietatea că $A \cdot \bar{A}^t = I$ şi grupul simplectic $Sp(n)$ este definit în mod analog dar utilizînd cuaternionii.

(a). Să se arate că $U(n)$ şi $Sp(n)$ sînt grupuri topologice şi că există produsele locale $U(n) \longrightarrow S^{2n-1}$ cu fibra $U(n-1)$ şi $Sp(n) \longrightarrow S^{4n-1}$, cu fibra $Sp(n-1)$.

(b). Dacă $SU(n)$ este subgrupul lui $U(n)$ al matricelor de determinant egal cu 1, să se arate că există un produs local $SU(n) \longrightarrow S^{2n-1}$, cu fibra $SU(n-1)$.

(c). Să se deducă din cele de mai sus că $\pi_r(U(n)) \cong \pi_r(U(n+1))$ şi

$\pi_r(SU(n)) \cong \pi_r(SU(n+1))$,pentru $r<2n$ şi că $\pi_r(Sp(n)) \cong \pi_r(Sp(n+1))$ pentru $r < 4n+2$.

(d).Să se arate că $\pi_1(U(n)) \cong Z$, $\pi_2(U(n)) = 0$ şi $\pi_3(U(n)) \cong Z$, pentru $n \geq 2$ şi că $\pi_1(Sp(n)) = \pi_2(Sp(n)) = 0$ şi $\pi_3(Sp(n)) \cong Z, n \geq 1$

Rezolvare.

(a).Faptul că U(n) şi Sp(n) sînt grupuri topologice rezultă imediat Apoi U(n-1) se identifică cu un subgrup închis al grupului U(n) prin aplicaţia $A \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.Ca în Exerciţiul 7.23 se arată că aplicaţia $\hat{A} \longrightarrow (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn})$ induce un homeomorfism $U(n)/U(n-1) \longrightarrow S^{2n-1}$ .Proiecţia canonică $p:U(n) \longrightarrow S^{2n-1}$ are o secţiune locală.Anume,se ia $U = \{z=(z_1,\ldots,z_n) / \ z_n \neq -1\}$ şi $f:U \longrightarrow U(n)$,cu $f(z)=(f_1,\ldots,f_n)$,cu $f_r = e_r - \frac{z_r}{1+z_n}(z+e_n)$,$1 \leq r \leq n-1$,$f_n = z$.

Se aplică Exerciţiul 7.22,pentru G=U(n),H=U(n-1) şi K ={I} şi obţine produsul local $U(n) \longrightarrow S^{2n-1}$ cu fibra U(n-1).

Dacă se ia apoi K subgrupul matricelor de forma

$$J_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & z \end{pmatrix}, z \in S^1 ;$$

atunci aplicaţia $U(n)/K \longrightarrow SU(n)$, $\hat{A} \longrightarrow J_z A$,dacă det A=z,este un homeomorfism.Aplicînd iarăşi Exerciţiul 7.22 , obţinem un produs local $SU(n) \longrightarrow S^{2n-1}$ cu fibra SU(n-1).

Pentru Sp(n) demonstraţiile sînt analoage şi le omitem.

(c).Pentru fibrarea $p:U(n+1) \longrightarrow S^{2n+1}$,avem şirul exact

$$\ldots \longrightarrow \pi_{r+1}(S^{2n+1}) \longrightarrow \pi_r(U(n)) \longrightarrow \pi_r(U(n+1)) \longrightarrow \pi_r(S^{2n+1}) \longrightarrow$$

avem pentru $r+1 < 2n+1$,adică pentru $r < 2n$, $\pi_r(U(n+1)) \cong \pi_r(U(n))$.

Analog se stabileşte celălalt izomorfism.

(d) Considerăm fibrarea Serre $p:U(n) \longrightarrow S^{2n-1}$, cu fibra $U(n-1)$ pentru $n=2$ şi avem şirul exact

$$\ldots \to \pi_{r+1}(S^3) \to \pi_r(S^1) \longrightarrow \pi_r(U(2)) \longrightarrow \pi_r(S^3) \to \ldots$$

din care deducem $\pi_3(U(2)) \cong \pi_3(S^3) \cong Z$, $\pi_2(U(2)) = 0$ şi $\pi_1(U(2)) \cong Z$. Avem apoi $\pi_r(U(n)) \cong \pi_r(U(n-1)) \cong \pi_r(U(n-2))$, etc, $\pi_r(U(n)) \cong \pi_r(U(2))$, pentru $r < 4$. Am folosit faptul că $U(1)$ este homeomorf cu S^1, ceea ce este evident.

In mod analog, avem $\pi_r(Sp(n)) \cong \pi_r(Sp(n-1)) \cong \ldots \cong \pi_r(Sp(2)) \cong \pi_r(Sp(1))$ dacă $r < 6$. Dar $Sp(1) \cong S^3$ şi prin urmare $\pi_r(Sp(n)) \cong \pi_r(S^3)$, $r < 6$, prin urmare $\pi_r(Sp(n)) \cong \pi_r(S^3)$, $r < 6$, de unde obţinem $\pi_1(Sp(n)) = \pi_2(Sp(n)) = 0$, $\pi_3(Sp(n)) \cong Z$, dacă $n \geq 1$.

7.26. (a) Date elementele $\alpha \in \pi_{n+r}(S^n)$, $\beta \in \pi_{n+s}(S^n)$, să se arate că produsul Whitehead $[\alpha, \beta]$ este zero dacă α sau β este în imaginea homomorfismului $p_* : \pi_*(SO(n+1)) \longrightarrow \pi_*(S^n)$, unde $p:SO(n+1) \longrightarrow S^n$ este produsul local cu fibra $SO(n)$ (pentru S^n se ia ca punct bază punctul $(0,\ldots,0,1)$).

(b) Să se arate că dacă incluziunea $i:SO(n) \longrightarrow SO(n+1)$ induce monomorfismul $i_* : \pi_{n+r-1}(SO(n)) \longrightarrow \pi_{n+r-1}(SO(n+1))$, atunci $[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha] = 0$, pentru toate elementele $\alpha \in \pi_{n+r}(S^n)$ şi $\beta \in \pi_{n+s}(S^n)$.

(c) Să se stabilească rezultate analoage folosind $SU(n)$, $Sp(n)$ în loc de $SO(n)$ şi să se deducă din cele de mai sus că $[\alpha, \beta] = 0$ $\forall \alpha, \beta \in \pi_*(S^2)$, exceptînd cazul cînd $\alpha, \beta \in \pi_2(S^2)$.

Rezolvare:

(a) Fie $\alpha \in \pi_{n+r}(S^n)$, $\beta \in \pi_{n+s}(S^n)$, reprezentate respectiv de $f:S^{n+r} \longrightarrow S^n$ şi $g:S^{n+s} \longrightarrow S^n$. Atunci, (vezi Exerciţiul 6.14), $[\alpha, \beta] = [\nabla (f \vee g) \theta]$,

$$S^{2n+r+s-1} \xrightarrow{\theta} S^{n+r} \vee S^{n+s} \xrightarrow{f \vee g} S^n \vee S^n \xrightarrow{\nabla} S^n$$

Fie acum $\alpha = p_* \alpha'$, cu α' reprezentat de $f_1:S^{n+r} \longrightarrow SO(n+1)$.

Ca şi în Exerciţiul 6.14 considerăm compunerea
$E^{2n+r+s} \cong E^{n+r} \times E^{n+s} \xrightarrow{\pi} (E^{n+r} \times E^{n+s}) \cup_\theta (S^{n+r} \vee S^{n+s}) \cong S^{n+r} \times S^{n+s}$

$\xrightarrow{f_1 \times g} SO(n+1) \times S^n \xrightarrow{\mu} S^n$, unde $\mu(A,x) = Ax$.

Avem $(\mu(f_1 \times g)\nu)/S^{2n+r+s-1} \simeq \nabla(pf_1 \times g)\theta$ şi deoarece prima aplicaţie are o extensie la E^{2n+r+s} rezultă că aceasta este omotopă cu o aplicaţie constantă. Prin urmare $[\nabla(pf_1 \times g)\theta] = 0$.

(b). Considerăm şirul exact de omotopie al fibrării Serre
$p: SO(n+1) \longrightarrow S^n$, cu fibra $SO(n)$:

$\ldots \to \pi_{n+r}(SO(n+1)) \xrightarrow{p_*} \pi_{n+r}(S^n) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n+r-1}(SO(n))$

$\xrightarrow{i_*} \pi_{n+r-1}(SO(n+1)) \to \ldots$

Dacă i_* este monomorfism, rezultă că avem $\operatorname{Im}\partial_* = 0$, deci $\operatorname{Ker}\partial_* = \pi_{n+r}(S^n)$ şi prin urmare p_* este epimorfism. Aplicăm (a) şi rezultă $[\alpha, \beta] = 0, \forall \alpha \in \pi_{n+r}(S^n), \beta \in \pi_{n+s}(S^n)$.

(c) Să considerăm produsul local $p: SO(3) \longrightarrow S^2$, cu fibra $SO(2)$. Avem $S^1 \cong SO(2)/SO(1)$ şi cum $SO(1) = \{1\}$, rezultă $SO(2) \cong S^1$.

Avem atunci şirul exact
$\ldots \to \pi_r(SO(2)) \xrightarrow{i_*} \pi_r(SO(3)) \xrightarrow{f_*} \pi_r(S^2) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{r-1}(SO(2)) \xrightarrow{i_*}$

şi pentru $r > 2$, avem că $p_*: \pi_r(SO(3)) \longrightarrow \pi_r(S^2)$ este un izomorfism. Aplicînd (a) deducem că pentru $\alpha \in \pi_{2+r}(S^2)$, $\beta \in \pi_{2+s}(S^2)$, pentru $r > 0$, sau $s > 0$, avem $[\alpha, \beta] = 0$.

Rezultate analoage se obţin considerînd produsele locale
$p: SU(n+1) \longrightarrow S^{2n+1}$, cu fibra $SU(n)$ şi respectiv
$p: Sp(n+1) \longrightarrow S^{4n+3}$, cu fibra $Sp(n)$.

[G]

1). Alte soluţii ale Exerciţiului 7.3 pot fi găsite în: V.A.Rohlin & D.B.Fuks, Nacialnîi kurs topologii, Geometriceskie glavî, Nauka, Moskva, 1977, p.370 şi G.W.Whitehead, Elements of Homotopy Theory, Springer-Verlag, New York Inc., 1978, Lemma (3.3), p.165.

2). Partea a 2-a a Exerciţiului 7.3 este o reciprocă a Corolarului 7.2.16, care afirmă că dacă (X,Y) este o pereche 2-simplă, atunci $\pi_2(X,Y)$ este abelian.

3). Rezultate mai generale privind "omorîrea" unor grupuri de omotopie ale unui spaţiu (Exerciţiul 7.18 şi Teorema 7.5.8) sînt legate de aşa numita descompunere Moore-Postnikov a unei aplicaţii (simple şi pentru care se poate consulta, de exemplu, E.H.Spanier, Algebraic Topology, Mir, 19 1, Capitolul 8, paragraful 3.

4). Construcţia unor produse locale (vezi Exerciţiile 7.20, 7.21) avînd baza S^n se poate face astfel (vezi de exemplu, Ioan Pop, Varietăţi diferenţiabile, Univ."Al.I.Cuza", Iaşi, 19 5, p.100): Fie $S^n = E_-^n \cup E_+^n$, cu $E_-^n = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in S^n / x_{n+1} > 0\}$, $E_+^n = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in S^n / x_{n+1} \geq 0\}$, cu $E_-^n \cap E_+^n = S^{n-1}$.
Fie G un grup de homeomorfisme ale unui spaţiu F şi $h: S^{n-1} \longrightarrow G$ o aplicaţie. Se notează cu E_h spaţiul obţinut din reuniunea disjunctă $(E_-^n \times F) \cup (E_+^n \times F)$ identificînd $(x,y) \in E_-^n \times F$ cu $(x,h(x)y) \in E_+^n \times F$, pentru $x \in S^{n-1}, y \in F$. Se poate defini atunci $p_h: E_h \longrightarrow S^n$, încît fiecare din aplicaţiile $E_-^n \times F \longrightarrow E_h \xrightarrow{p_h} S^n$ şi $E_+^n \times F \longrightarrow E_h \xrightarrow{p_h} S^n$ să fie proiecţia pe prima componentă. Atunci, $p_h: E_h \longrightarrow S^n$ este un produs local cu fibra F.
Luînd de exemplu $B=S^1, F=I=[0,1], G=Z_2=\{Id,g\}$ şi $h: S^0 \longrightarrow G$, $h(-1)=g, h(1)=Id$, se obţine că E_h este banda lui Möbus.
Sau, dacă $B=S^1, F=S^1, G=Z_2=\{Id,g\}, h: S^0 \longrightarrow G, h(-1)=g, h(1)=Id$, spaţiul E_h este sticla lui Klein.

5). Alte rezultate privind grupurile de omotopie ale grupurilor topologice "clasice" şi ale varietăţilor Stiefel (Exerciţiile 7.23-7.26) pot fi găsite, de exemplu, în D.Husemoller, Fibre Bundles, Mc Graw-Hill, 1966, Chapter 7.

6). Rezultatul Exerciţiului 7.15, privind structura de CW-complex

a spaţiului de acoperire universală K a unui CW-complex K, rămîne adevărat şi pentru K un spaţiu de acoperire oarecare. Pentru demonstraţie se poate consulta J.H.C.Whitehead, Combinatorial Homotopy,I,Bull.of Amer.Math.Soc.Vol.55,no.3, Part 1,(1949),p.213-245.

De asemenea,în cazul în care K este un poliedru,atunci orice spaţiu de acoperire K al lui K are chiar o structură de poliedru (de aceeaşi dimensiune ca şi K).Se poate consulta, de exemplu,P.Hilton & S.Wylie,Homology Theory,Mir,1966, § 6.8,p.248.

7. In Exerciţiul 7.12 se arată că orice CW-complex este echivalent omotopic cu un spaţiu triangulabil,în sensul Exerciţiului 7.11. Următorul exemplu,luat din A.T.Lundell & S.Weingram,The Topology of CW Complexes,Van Nostrand Reinhold Co.,1969,p.81 , arată că nu orice CW-complex poate fi triangulat.

Fie $g:E^1 \longrightarrow R^2$,aplicaţia definită prin

$$g(t)=\begin{cases}(-t,0), & -1 \le t \le 0,\\ (t,t\sin\frac{\pi}{t}), & 0 \le t \le 1\end{cases}$$

Aplicaţia g este bine definită şi continuă.Fie apoi $h:S^2 \longrightarrow E^1$, $h(x_1,x_2,x_3)=x_1$ şi $f:R^2 \longrightarrow S^2$ inversa proiecţiei stereografice $S^2-\{(0,0,1)\} \longrightarrow R^2$.Definim atunci aplicaţia $E^3 \supset S^2 \xrightarrow{\varphi} S^2$,prin $\varphi=fgh$ şi considerăm spaţiul $X=S^2 \cup_{\varphi} E^3$.Acesta este un CW-complex cu două celule de dimensiune zero,o celulă de dimensiune unu,o celulă de dimensiune 2 şi o celulă de dimensiune 3.Să presupunem că X este un poliedru. Fiind un spaţiu compact,ar avea o triangulare finită.Fie $A \subset X$ subcomplexul simplicial al lui X al cărui spaţiu este reuniunea tuturor 3-simplexelor acestei triangulări.Dacă τ este un simplex în X şi $\tau \subset S^2 \cap A=\dot{A}=\varphi(S^2)$,atunci $\dim\tau<2$.Rezultă astfel că $\varphi(S^2)=S^2 \cap A \subset X^1$,scheletul 1-dimensional al presupusei triangulări a lui X.Acest lucru însă este imposibil deoarece curba $\varphi(S^2)$ avînd o infinitate de puncte duble,nu poate fi conţinută în complexul simplicial finit X^1.

Capitolul 8. OMOLOGIA ŞI COOMOLOGIA CW-COMPLEXELOR.

8.1. Fie $\mathcal{A}_n(X)$ şi $\mathcal{A}_n(X,Y)$ ca în Exerciţiile 7.2 şi respectiv 7.4.

(a). Să se arate că pentru orice pereche topologică (X,Y), $h_n \mathcal{A}_n(X) = h_n \mathcal{A}_n(X,Y) = 0$, astfel încît homomorfismele Hurewicz pot fi privite ca homomorfisme

$$h_n : \pi_n^*(X) \longrightarrow H_n(X), \quad h_n : \pi_n^*(X,Y) \longrightarrow H_n(X,Y).$$

(b). Să se arate că dacă se consideră un CW-complex K, conex şi dacă $n \geq 2$, atunci $h_n : \pi_n^*(K^n, K^{n-1}) \longrightarrow H_n(K^n, K^{n-1})$ este totdeauna un izomorfism.

Rezolvare. Fie $\mathcal{A}_n(X)$ subgrupul lui $\pi_n(X)$ generat de elementele de forma $x - u_{\#} x$, $[u] \in \pi_1(X)$ (Exerciţiul 7.2). Apoi, din faptul că h_n este homomorfism, avem $h_n(x - u_{\#} x) = h_n(x) - h_n(u_{\#} x)$. Utilizăm definiţia homomorfismului Hurewicz h_n. Fie x reprezentat de aplicaţia $f : S^n \longrightarrow X$, care induce homomorfismul $f_* : H_n(S^n) \longrightarrow H_n(X)$. Dacă σ_n este generatorul standard al grupului $H_n(S^n)$, atunci $h_n(x) = f_*(\sigma_n)$. Fie apoi $u_{\#} x = [f']$ (Teorema 7.2.3). Avem atunci $h_n(u_{\#} x) = f'_*(\sigma_n)$. Dar $f' \simeq f$ şi deci $f_* = f'_*$, care arată că $h_n(u_{\#} x) = h_n(x)$, adică $h_n(\mathcal{A}_n(X)) = 0$. Rezultă că putem considera homomorfismul $h_n : \pi_n^*(X) \longrightarrow H_n(X)$, unde $\pi_n^*(X) = \pi_n(X) / \mathcal{A}_n(X)$. În mod analog se tratează cazul relativ.

(b). După Exerciţiul 7.16 există o surjecţie

$$\Phi_1^n : \bigoplus_{A_n - B_n} \pi_n(E_\alpha^n, S_\alpha^{n-1}) \longrightarrow \pi_n^*(K^n, K^{n-1}).$$

Apoi, prin Propoziţia 8.2.9, există izomorfismul

$$\Phi^n : \bigoplus_{A_n - B_n} H_n(E_\alpha^n, S_\alpha^{n-1}) \longrightarrow H_n(K^n, K^{n-1}).$$

Din definiţiile celor două homomorfisme şi din cea a homomorfismului Hurewicz, se poate verifica comutativitatea următoarei diagrame:

$$\begin{array}{ccc} \oplus \pi_n(E^n_\alpha, S^{n-1}_\alpha) & \xrightarrow{\phi^n_1} & \pi^n_n(K^n, K^{n-1}) \\ {\scriptstyle A_n - B_n}\downarrow \oplus h'_n & & \downarrow h_n \\ \oplus H_n(E^n_\alpha, S^{n-1}_\alpha) & \xrightarrow{\phi^n} & H_n(K^n, K^{n-1}) \\ {\scriptstyle A_n - I_n} & & \end{array}$$

Deoarece perechea (E^n, S^{n-1}) este relativ n-simplă, $\forall\, n \geq 2$, (Exemplul 7.2.14), putem aplica Lema 8.3.6 şi rezultă că h'_n $h'_n : \pi_n(E^n_\alpha, S^{n-1}_\alpha) \longrightarrow H_n(E^n_\alpha, S^{n-1}_\alpha)$ sînt izomorfisme. Prin urmare $h_n \phi^n_1 = \phi^n (\oplus h'_n)$ -izomorfism. Rezultă că ϕ^n_1 este monomorfism. Cum este şi epimorfism (7.16), rezultă că ϕ^n_1 şi deci şi h_n este izomorfism.

8.2. Fie D spaţiul obţinut dintr-un triunghi echilateral identificînd laturile ca în Fig. 37 (D= "the dunce hat")

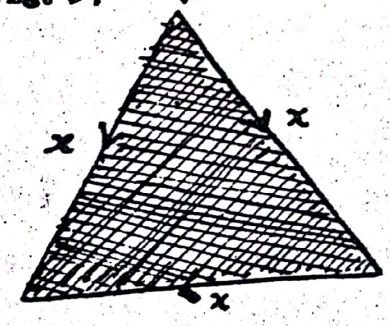


Fig. 37

Să se arate că D este triangulabil şi folosind Teorema 8.3.10, să se arate că D este contractibil. D nu este însă colapsabil.

Rezolvare. Spaţiul D se obţine dintr-un cerc prin adjuncţia discului E^2, identificînd xxx^{-1} cu $S^1 \subset E^2$. Aplicînd atunci Teorema 3.3.19 (vezi şi demonstraţia), rezultă că D este triangulabil şi că $\pi_1(D)$ se obţine din $\pi_1(S^1)$, impunînd generatorului x al acestuia relaţia xxx^{-1}. Rezultă deci că $\pi_1(D) = 0$. Cum D este spaţiu liniar conex, rezultă din Teorema 8.3.3, că avem $H_1(D) = 0$. Din Teorema 8.2.3 avem $H_2(D, S^1) \cong \mathbb{Z}$ şi din sirul exact de omologie

al perechii (D,S^1), deducem că $H_2(D)=0$. Este evident că pentru $r>2$, avem $H_r(D)=0$. Putem aplica atunci Teorema 8.3.10 aplicației $f:D \longrightarrow$ pct., deoarece $\pi_1(D)=\pi_1(\text{pct})=0$, D și pct. sînt CW-complexe conexe și $f_*:H_n(D) \longrightarrow H_n(\text{pct})$ este izomorfism $\forall$ n. Rezultă că f este o echivalență omotopică și prin urmare D este spațiu contractibil. Nu este însă colapsabil deoarece nici un 2-simplex al său nu are fețe libere (O triangulare este dată în Fig. 38).

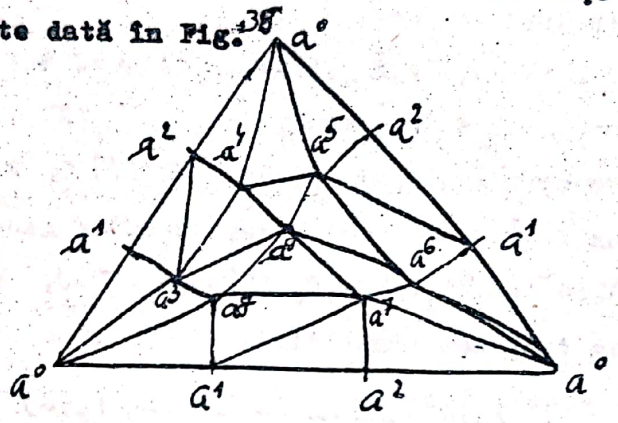


Fig. 38

8.3. (a). Să se arate că dacă pentru o n-varietate omologică simplu conexă X, avem $\tilde{H}_r(X)=0$, pentru $r \leq [n/2]$ (partea întreagă a lui n/2), atunci X este echivalentă omotopic cu S^n.

(b). Să se arate că dacă X este 3-varietatea din Exercițiul 5.9, atunci SX este o 4-varietate omologică care este echivalentă omotopic cu S^4, dar nu este homeomorfă cu S^4 (astfel conjectura lui Poincaré este falsă pentru varietăți omologice).

Rezolvare. Dacă n=1, atunci X este o 1-varietate topologică (Exercițiul 5.8). Ori, în acest caz X este homeomorf cu un cerc, care nu este spațiu simplu conex. Prin urmare, condițiile din enunț pot fi satisfăcute numai dacă $n \geq 2$. Avem atunci $H_1(X)=0$. Deducem $H_1(X;Z_2) \cong H_1(X) \otimes Z_2 \oplus \text{Tor}(H_0(X),Z_2)=0$. Conform Corolarului 5.3.18, rezultă că X este n-varietate omologică orientabilă și prin Propoziția 5.3.6, avem $H_n(X) \cong Z$.

Din Dualitatea Poincaré, deducem $H^{n-1}(X) = 0$. Aplicînd apoi Propoziţia 5.2.17, avem $H^{n-1}(X) \cong FH_{n-1}(X) \oplus TH_{n-2}(X)$, şi deci $FH_{n-1}(X) = 0$, $TH_{n-2}(X) = 0$. Dar $H_{n-1}(X)$ este un grup abelian liber (Exerciţiul 5.7) Obţinem prin urmare că $H_{n-1}(X) = 0$ şi $H_{n-2}(X) = FH_{n-2}(X)$. Apoi, deoarece $H_2(X) = 0$, aplicînd iarăşi Dualitatea Poincaré şi Propoziţia 5.2.17, avem $0 = H^{n-2}(X) = FH_{n-2}(X) \oplus TH_{n-3}(X)$, care implică $FH_{n-2}(X) = 0$, adică $H_{n-2}(X) = 0$ şi $TH_{n-3}(X) = 0$, adică $H_{n-3}(X) = FH_{n-3}(X)$. Din aproape în aproape, obţinem:

$H_0(X) = 0, H_1(X) = 0, \ldots, H_{n-1}(X) = 0, H_n(X) \cong Z$. Mai avem şi $\pi_1(X) = 0$. După Corolarul 8.3.9, rezultă că $h_n : \pi_n(X) \longrightarrow H_n(X)$ este izomorfism şi prin urmare $\pi_n(X) \cong Z$.

Fie acum $f : S^n \longrightarrow X$ reprezentînd generatorul lui $\pi_n(X)$. Avem $\pi_1(S^n) = 0$, $\pi_1(X) = 0$, $H_k(S^n) = 0$, $H_k(X) = 0$, $k < n$. Apoi, pentru $k = n$, avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(X) \\ \uparrow{\scriptstyle h_n} & & \uparrow{\scriptstyle h_n} \\ \pi_n(S^n) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_n(X) \end{array}$$

deoarece $f_* h_n [1_{S^n}] = f_* (\sigma_n) = h_n f_\# [1_{S^n}] = h_n [f]$.

Cum h_n şi $f_\#$ sînt izomorfisme, rezultă că şi f_* este izomorfism. Aplicînd Teorema 8.3.10, rezultă că f este o echivalenţă omotopică.

(b). Fie acum X ca în Exerciţiul 5.9. Fie SX suspensia acesteia. După Exerciţiul citat, avem că SX este o 4-varietate omologică simplu conexă. Avem în plus $\tilde{H}_0(SX) = 0$, $\tilde{H}_1(SX) \cong \tilde{H}_0(X) = 0$ şi $H_2(SX) \cong H_1(X) = 0$ (prin izomorfismul de suspensie). După (a) rezultă că SX este echivalent omotopic cu S^4. Cum SX nu este însă o 4-varietate (Exerciţiul 5.9), rezultă că SX nu este homeomorfă cu S^4.

8.4. Fie $f:K \longrightarrow L$ o aplicaţie cu puncte bază între CW-complexe conexe şi fie $\tilde{f}:\tilde{K} \longrightarrow \tilde{L}$ aplicaţia corespunzătoare între spaţiile de acoperire universală, astfel încît este comutativă următoarea diagramă

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{L} \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ K & \xrightarrow{f} & L \end{array}$$

unde g şi h sînt aplicaţii de acoperire (vezi Exerciţiile 6.23 şi 6.25). Să se arate că dacă

$$f_{\#} : \pi_1(K) \longrightarrow \pi_1(L) \qquad \text{şi}$$

$$\tilde{f}_{\#} : H_r(\tilde{K}) \longrightarrow H_r(\tilde{L})$$

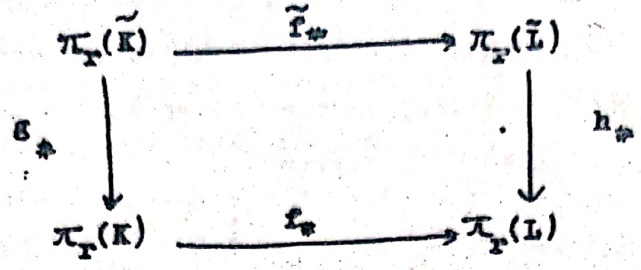
sînt izomorfisme pentru $\forall$ r, atunci f este o echivalenţă omotopică (cu puncte bază).

Rezolvare: Considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{L} & \xrightarrow{h} & L \\ & \searrow^{fg} \nearrow & \\ & \tilde{K} & \end{array}$$

Avem $h_{\#}(\pi_1(K)) = \{0\} \subset h_{\#}(\pi_1(L))$ şi aplicînd Exerciţiul 6.23, rezultă că există o singură aplicaţie $\tilde{f}:\tilde{K} \longrightarrow \tilde{L}$ care face diagrama comutativă.

Deoarece $\tilde{K}, \tilde{L}$ sînt presupuse conexe, $\pi_1(\tilde{L}) = \pi_1(\tilde{K}) = 0$ şi $\tilde{f}_{\#}$ sînt izomorfisme, rezultă din Teorema lui Whitehead (8.3.10) că $\tilde{f}$ este o echivalenţă omotopică cu puncte bază. Rezultă prin urmare că $\tilde{f}_{\#} : \pi_r(\tilde{K}) \longrightarrow \pi_r(\tilde{L})$ sînt izomorfisme pentru $\forall$ r. Putem considera diagrama comutativă:



unde ,pentru $r \geq 2, h_{\#}$ și $g_{\#}$ sînt izomorfisme.Rezultă că pentru $r \geq 2$,homomorfismele $f_{\#} : \pi_r(K) \longrightarrow \pi_r(L)$ sînt izomorfisme.Cum avem de asemenea $\pi_1(K) = \pi_1(L) = 0$, rezultă din Teorema 7.5.4 că f este o echivalenţă omotopică.

8.5.Fie L,M subcomplexe ale unui CW-complex K,unde $K=L \cup M$ şi presupunem că o 0-celulă k_0 a lui $L \cap M$ este luată ca punct bază Considerînd incluziunea lui $L \vee M$ în

$$K' = (L \times 0) \cup \frac{(L \cap M) \times I}{k_0 \times I} \cup (M \times 1)$$

să se arate că pentru orice Ω -spectru E există un şir exact Mayer-Vietoris

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}^n(K;E) \xrightarrow{j^*} \tilde{H}^n(L;E) \oplus \tilde{H}^n(M;E) \xrightarrow{\eta^*} \tilde{H}^n(L \cap M;E) \xrightarrow{\delta^*} \tilde{H}^{n+1}(K;E) \longrightarrow \cdots$$

unde j^* este indus de aplicaţiile incluziune ale lui L,M în K şi $\eta^*(x \oplus y) = i_1^*(x) - i_2^*(y)$, unde $i_1, i_2 : L \cap M \longrightarrow L, M$ sînt incluziunile.

Rezolvare. Amintim (pg.331) că un Ω-spectru E este un şir de spaţii E_n, cu puncte bază, încît pentru orice n există o echivalenţă omotopică slabă $\varepsilon_n : E_n \longrightarrow \Omega E_{n+1}$.

Pentru un CW-complex K, avem o bijecţie

$(\varepsilon_n)_{\#} : [K, E_n] \longrightarrow [K, \Omega E_{n+1}]$ şi ultima mulţime este un grup. Se consideră atunci pe mulţimea $[K, E_n]$ o structură de grup, în raport cu care $(\varepsilon_n)_{\#}$ este izomorfism.Pentru o CW-pereche

(K,L) se ia $H^n(K,L;E) = [K/L, E_n]$. Pentru un CW-complex K, se ia $H^n(K;E) = H^n(K, \phi ; E)$, $\tilde{H}^n(K;E) = H^n(K, k_o; E)$. Se obţine $\tilde{H}^n(K;E) = [K, E_n]$.

In situaţia problemei, avem

$$\tilde{H}^n(L \vee M; E) = [L \vee M, E_n] \cong [L \vee M, \Omega E_{n+1}] \cong [L, \Omega E_{n+1}] \oplus [M, \Omega E_{n+1}] \cong$$
$$\cong [L, E_n] \oplus [M, E_n] \cong \tilde{H}^n(L;E) \oplus \tilde{H}^n(M;E) .$$

Apoi, K' este un CW-complex şi $L \vee M$ este un subcomplex al acestuia. Putem considera incluziunea $i: L \vee M \longrightarrow K'$, $i(l \vee k_o) = (l, 0)$ şi $i(k_o \vee m) = (m, 1)$.

Considerăm CW-perechea $(K', L \vee M)$ pentru care scriem şirul exact de coomologie (Teorema 8.4.4) şi avem

$$\ldots \longrightarrow \tilde{H}^{n-1}(L \vee M; E) \xrightarrow{\delta^*} \tilde{H}^n(K', L \vee M; E) \xrightarrow{j^*} \tilde{H}^n(K'; E) \xrightarrow{i^*}$$
$$\tilde{H}^n(L \vee M; E) \longrightarrow \ldots$$

Avem $\tilde{H}^{n-1}(L \vee M; E) \cong \tilde{H}^{n-1}(L;E) \oplus \tilde{H}^n(M;E)$.

Scriem apoi $K' = (L \vee M) \cup Z$, cu $Z \cap (L \vee M) = \{k_o\}$ şi aplicăm izomorfismul de excizie (Teorema 8.4.4). Avem:

$$H^n(K', L \vee M; E) \cong H^n(Z, k_o; E) = \tilde{H}^n(L \cap M; E).$$

Ţinînd de asemenea cont că avem $K' \simeq K$, cum se constată imediat, (vezi şi Fig. 39), deducem următorul şir exact de coomologie:

$$\ldots \longrightarrow \tilde{H}^{n-1}(L;E) \oplus \tilde{H}^{n-1}(M;E) \xrightarrow{\delta^*} \tilde{H}^n(L \cap M; E) \xrightarrow{\eta^*}$$
$$H^n(K;E) \xrightarrow{j^*} H^n(L;E) \oplus H^n(M;E) \xrightarrow{\delta^*} \ldots$$

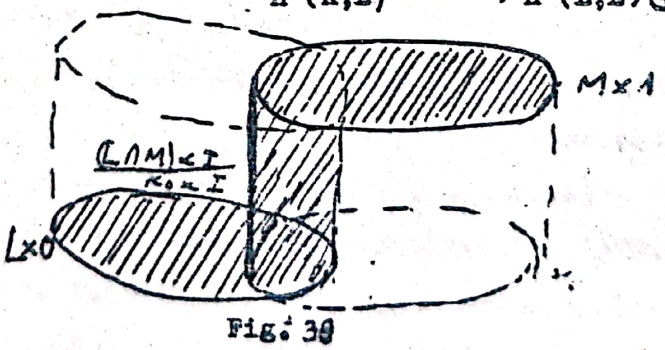


Fig. 39

Rămîne să arătăm că j^* şi η^* satisfac condiţiile cerute în enunţ.

Homomorfismul j^* este compunerea următoare de homomorfisme:

$$\tilde{H}^n(K;E) \xrightarrow{\rho^*} \tilde{H}^n(K';E) \xrightarrow{i^*} \tilde{H}^n(L \vee M; E) \xrightarrow{j_1^*}$$
$$\tilde{H}^n(L;E) \oplus \tilde{H}^n(M;E) \longrightarrow \ldots$$

unde $\xi : K' \longrightarrow K$ este echivalență omotopică cu $\xi(L \times 0) = L$ și $\xi(M \times 1) = M$, iar j_1 este indus de incluziunile lui L și M în $L \vee M$. Este evident acum că j este indus de aplicațiile de incluziune ale lui L și M în K.

Homomorfismul δ^* este indus de aplicația

$$(L \wedge M) \wedge S^1 = K'/L \vee M \xleftarrow{\lambda} C_i = K' \times 0 \cup [L \vee M) \wedge I] \xrightarrow{i'} (L \vee M) \wedge S^1.$$

Fie acum $x \in \tilde{H}^n(L; E) = [L, E_n]$, $y \in \tilde{H}^n(M; E) = [M, E_n]$, reprezentate de $f : L \wedge S^1 \longrightarrow E_{n+1}$ și respectiv $g : M \wedge S^1 \longrightarrow E_{n+1}$.

Fie $\alpha = (f \vee g)\, i'$. Dacă presupunem că $y = 0$, atunci g este constantă.

Clasa $\lambda^*(i_1^*(x))$ este reprezentată de $f\lambda : C_i \longrightarrow E_{n+1}$.

Avem de arătat că $f : C_i \longrightarrow E_{n+1}$.

$$C_i \simeq \frac{L \times \left[\frac{2}{3}, 1\right] \cup (L \cap M) \times \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup M \times \left[0, \frac{1}{3}\right]}{k_0 \times I \cup L \times 1 \cup M \times 0}$$

Atunci α poate fi considerată ca aplicația

$$\alpha(z,t) = \begin{cases} f(z, 3t-2) & ; \ \frac{2}{3} \leq t \leq 1, z \in L \\ \text{pct bază, altfel} \end{cases}$$

Atunci

$$f\lambda(z,t) = \begin{cases} f(z, 3t-1) & ; \ \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}, z \in L \cap M \\ \text{pct. bază, în rest} \end{cases}$$

Avem $f\lambda \simeq \beta : C_i \longrightarrow E_{n+1}$, unde β este aplicația

$$\beta(z,t) = \begin{cases} h(z, 3t-2) & ; \ \frac{2}{3} \leq t \leq 1, z \in L \\ \text{pct. bază, în rest} \end{cases}$$

unde $h(z, 3t-2) = f(z, 3t-2)$, $\forall\, t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, $z \in M \cap L$.

Dar $L \times \left[\frac{1}{3}, 1\right]/R \subset C_i$ este chiar $L \wedge I$. Avem $h \simeq f$ rel $(L \cap M) \times \{0, 1\}/R$ adică $h \simeq f : L \wedge I \longrightarrow E_{n+1}$ rel $(L \cap M) \wedge I$, deoarece $h \simeq f : L \wedge I \longrightarrow E_{n+1}$ rel pct. bază și $(L \cap M) \wedge I$ este contractibil. Obținem astfel $[\alpha] = [f\lambda] = \lambda^* i_1^*(x)$. În mod analog se arată că $[g\lambda] = \lambda^*(-i_2^*(y))$, dacă f este constantă. Se obține astfel $\lambda^*(x \oplus y) = i_1^*(x) - i_2^*(y)$.

8.6. Fie $i:L \longrightarrow K$ incluziunea unui subcomplex într-un CW-complex și fie M un alt CW-complex.

(a) Să se arate că $(C_i) \overline{\wedge} M$ și $C_{(i \overline{\wedge} 1)}$ sînt homeomorfe, unde $i \overline{\wedge} 1 : L \overline{\wedge} M \longrightarrow K \overline{\wedge} M$.

(b) Dat un întreg r, fie L_r spațiul $S^1 \cup_f E^2$, unde $f:S^1 \longrightarrow S^1$ este o aplicație de grad r. Pentru un Ω-spectru E se definește $H^n(K;E;Z_r) = H^{n+2}(K \wedge L_r; E)$.

Să se arate că există un șir exact

$$0 \longrightarrow H^n(K;E) \otimes Z_r \longrightarrow H^n(K;E;Z_r) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H^{n+1}(K;E), Z_r) \longrightarrow 0$$

și că dacă $E_n = K(Z,n)$, atunci $H^n(K;E;Z_r) = \tilde{H}^n(K;Z_r)$.

Rezolvare.

(a) Avem $C_i \overline{\wedge} M = [(K \times 0) \cup L \wedge I] \overline{\wedge} M = (K \times 0) \overline{\wedge} M \cup [L \wedge I) \overline{\wedge} M] \cong$

$\cong (K \overline{\wedge} M) \times 0 \cup [(L \overline{\wedge} M) \wedge I] = C_{i \overline{\wedge} 1}$, homeomorfismul $\cong$ având loc datorită homeomorfismului $(K \wedge I) \overline{\wedge} M \cong (K \overline{\wedge} M) \wedge I$.

(b) Pentru aplicația $f:S^1 \longrightarrow S^1$ putem considera șirul de aplicații (Teorema 6.4.7):

$$S^1 \xrightarrow{f} S^1 \xrightarrow{f_1} C_f \xrightarrow{f_2} \Sigma S^1 \xrightarrow{f \wedge 1} \Sigma S^1 \xrightarrow{f_1 \wedge 1} \Sigma C_f \longrightarrow \dots$$

adică

$$S^1 \xrightarrow{f} S^1 \xrightarrow{f_1} C_f \xrightarrow{f_2} S^2 \xrightarrow{f \wedge 1} S^2 \xrightarrow{f_1 \wedge 1} \Sigma C_f \longrightarrow$$

Din acesta obținem șirul:

$$(1)\quad S^1 \wedge K \xrightarrow{f \wedge 1} S^1 \wedge K \xrightarrow{f_1 \wedge 1} C_f \wedge K \xrightarrow{f_2 \wedge 1} S^2 \wedge K \xrightarrow{(f \wedge 1) \wedge 1} S^2 \wedge K \xrightarrow{(f_1 \wedge 1) \wedge 1} \Sigma C_f \wedge K \longrightarrow \dots$$

Putem arăta că există un homeomorfism

$\varphi : C_{f \wedge 1} \xrightarrow{\cong} C_f \wedge K$ (C_f este local compact, deci $C_f \overline{\wedge} K$ coincide cu $C_f \wedge K$), adică

$$\varphi : (S^1 \wedge K) \underset{f \wedge 1}{\cup} [(S^1 \wedge K) \wedge I] \longrightarrow [S^1 \cup_f (S^1 \wedge I)] \wedge K .$$

Definim φ prin: $\varphi((s \wedge k)) = s \wedge k$, dacă $s \wedge k \in S^1 \wedge K$ și

$\varphi((s \wedge k) \wedge t) = (s \wedge t) \wedge k$, dacă $(s \wedge k) \wedge t \in (S^1 \wedge K) \wedge I$.

Aplicaţia φ este bijecţie şi este continuă. Mai rămîne să arătăm că este deschisă. Fie deci o submulţime deschisă $U \subset (S^1 \wedge K) \underset{f \wedge 1}{\cup} [(S^1 \wedge K) \wedge I]$. Să arătăm că $\varphi(U)$ este deschisă în $[S^1 \cup_f (S^1 \wedge I)] \wedge K$. Fie $y = \varphi(x) \in \varphi(U)$. Dacă $x \overline{\in} S^1 \wedge K$, atunci este evident că $\varphi(U)$ este vecinătate a lui y. Să presupunem că $x = s \wedge k \in S^1 \wedge K \subset (S^1 \wedge K) \underset{f \wedge 1}{\cup} [(S^1 \wedge K) \wedge I]$. Atunci există $V_1 \subset S^1, W_1 \subset K$ deschise, încît $s \wedge k \in V_1 \wedge W_1 \subset U$. De asemenea, există $V_2 \subset S^1$, $W_2 \subset K$, $[0, t_o) \subset I$, deschise, încît $k \in W_2, f^{-1}(s) \in V_2$ şi $[(V_2 \wedge W_2) \wedge [0, t_o)] \subset U$.

Fie acum $W = W_1 \cap W_2$. Atunci $\varphi(x) \in \varphi((V_1 \wedge W) \cup_{f \wedge 1} (V_2 \wedge W) \times [0, t_o)) \subset \varphi(U)$, adică $V_1 \cup_f (V_2 \wedge [0, t_o)) \wedge W \subset \varphi(U)$. De aici rezultă că $V_1 \cup_f (V_2 \wedge [0, t_o))$ este o vecinătate pentru s şi prin urmare, $V_1 \cup_f (V_2 \wedge [0, t_o)) \wedge W$ este o vecinătate a lui $y = s \wedge k$ conţinută în $\varphi(U)$. Aceasta arată că $\varphi(U)$ este deschisă.

Prin urmare φ este un homeomorfism. Avem apoi $s(S^1 \wedge K) = (S^1 \wedge S^1) \wedge K = S^2 \wedge K$, etc., astfel încît şirul (1) poate fi interpretat ca şirul dat de Teorema 6.4.7 pentru aplicaţia $f \wedge 1 : S^1 \wedge K \longrightarrow S^1 \wedge K$. Atunci, în baza aceleaşi teoreme, are loc următorul şir exact (şirul lui Puppe):

$$(2)\quad \ldots \to [S^2 \wedge K, E_{n+2}] \xrightarrow{(Sf \wedge 1)^*} [S^2 \wedge K, E_{n+2}] \xrightarrow{(f_2 \wedge 1)^*}$$

$$[C_f \wedge K, E_{n+2}] \xrightarrow{(f_1 \wedge 1)^*} [S^1 \wedge K, E_{n+2}] \xrightarrow{(f \wedge 1)^*} [S^1 \wedge K, E_{n+2}] \to \ldots$$

Avem apoi, cum se constată imediat C_f homeomorf cu L_r, astfel încît, ţinînd seama de Definiţia 8.4.2 (a grupurilor de coomologie asociate cu E) şi de izomorfismele $[S^2 \wedge K, E_{n+2}] \cong [S^1 \wedge K, \Omega E_{n+2}] = [S^1 \wedge K, E_{n+1}] \cong [K, \Omega E_{n+1}] = [K, E_n]$, obţinem şirul exact

$$(3)\quad \ldots \to H^n(K; E) \xrightarrow{(Sf \wedge 1)^*} H^n(K; E) \xrightarrow{(f_2 \wedge 1)^*} H^n(K; E; Z_r)$$

$$\xrightarrow{\delta} H^{n+1}(K; E) \xrightarrow{(f \wedge 1)^*} H^{n+1}(K; E) \to \ldots\ldots$$

Acum ,ca în demonstraţia Teoremei 4.5.15 (pg.148),deducem din (3)următorul şir exact:

$$0 \longrightarrow H^n(K;E)\otimes Z_r \longrightarrow H^n(K;E;Z_r) \longrightarrow Tor(H^{n+1}(K;E;Z_r) \longrightarrow 0$$

Fie acum $E_n=K(Z,n)$.

Avem atunci $H^n(K;E;Z_r)=H^{n+2}(K\wedge L_r;E)=[K\wedge L_r,E_{n+2}]=[K,E_{n+2}^{L_r}]$(vezi aplicaţia de asociere,pg.220-221).

Avem $\Omega(E_{n+2}^{L_r})=(E_{n+2}^{L_r})^{S^1}\cong E_{n+2}^{L_r\wedge S^1}\cong E_{n+2}^{S^1\wedge L_r}=(\Omega E_{n+2})^{L_r}$

şi acest din urmă spaţiu este slab echivalent omotopic (din definiţia unui Ω-spectru,pg.331 şi deoarece L_r este CW-complex compact) cu $E_{n+1}^{L_r}$.Astfel şirul de spaţii $E_n'=E_{n+2}^{L_r}$ definesc un Ω-spectru.

Pentru acest Ω-spectru avem:

$$\pi_k(E_{n+2}^{L_r})=[S^k,E_{n+2}^{L_r}]\cong[S^k\wedge L_r,E_{n+2}]=\tilde{H}^{n+2}(S^k\wedge L_r)\cong$$

$\cong H^{n-k+2}(L_r)$,ultimul izomorfism fiind rezultatul unor izomorfisme de suspensie.

Ţinînd seama că avem

$$\tilde{H}^k(L_r)\cong\begin{cases}0,k\neq 2\\ Z_r,k=2\end{cases};$$

obţinem :

$$\pi_k(E_{n+2}^{L_r})=\begin{cases}0,k\neq n\\ Z_r,k=n\end{cases}$$

Aşadar,E_n' este un spaţiu Eilenberg-Mac Lane $K(n,Z_r)$.Utilizînd atunci Teorema 8.4.10,obţinem

$$H^n(K;E;Z_r)=[K,E_{n+2}^{L_r}]\cong[K,K(Z_r,n)]\cong\tilde{H}^n(K,Z_r).$$

8.7. Să se arate că dacă G este un grup abelian finit generat, atunci K(G,n) poate fi construit ca un CW-complex numărabil. Să se deducă din Corolarul 7.5.3 că avem K(G,n) un AHI.

Rezolvare. Fie G=F/R. Se construieşte mai întîi spaţiul $A=\bigvee_{\alpha} S^n_{\alpha}$ (Teorema 8.4.7), cîte o sferă pentru fiecare generator α al lui F. Avem pînă acum o mulţime finită de celule: una de dimensiune zero şi un număr egal cu numărul de generatori ai lui F de celule de dimensiune n. Se ataşează apoi cîte o (n+1)-celulă pentru fiecare element al lui $\pi_n(A)$. După Exerciţiul 7.12, $\pi_n(A)$ este numărabil şi deci spaţiul B astfel obţinut este un CW-complex cu o mulţime numărabilă de celule. Apoi, pentru orice $r > n$, $\pi_r(B)$ este numărabil şi spaţiul K(G,n) se obţine ataşînd spaţiului B cîte o celulă corespunzător fiecărui generator al lui $\pi_r(B)$, $r > n$. Rezultă că spaţiul K(G,n) are o mulţime numărabilă de celule. Există o echivalenţă omotopică slabă $\varepsilon_n : K(G,n) \longrightarrow \Omega K(G,n+1)$ (Corolarul 8.4.8). Apoi $\Omega K(G,n+1)$ este un AHI şi fie

$m : \Omega K(G,n+1) \times \Omega K(G,n+1) \longrightarrow \Omega K(G,n+1)$

După Teorema 7.3.16, $K(G,n) \times K(G,n)$ este un CW-complex şi aplicînd Corolarul 7.5.3 echivalenţei omotopice slabe ε_n de mai sus, obţinem bijecţia

$(\varepsilon_n)_{\#} : [K(G,n) \times K(G,n), K(G,n)] \longrightarrow [K(G,n) \times K(G,n), \Omega K(G,n+1)]$

Prin urmare, dacă considerăm aplicaţia

$m(\varepsilon_n \times \varepsilon_n) : K(G,n) \times K(G,n) \longrightarrow \Omega K(G,n+1)$, există

$m' : K(G,n) \times K(G,n) \longrightarrow K(G,n)$ încît

$\varepsilon_n m' \simeq m(\varepsilon_n \times \varepsilon_n)$. Avem $(\varepsilon_n \times \varepsilon_n) i_1'(y) = (\varepsilon_n \times \varepsilon_n)(y, y_0) = (\varepsilon_n(y), z_0) = i_1 \varepsilon_n(y)$. Avem astfel $m(\varepsilon_n \times \varepsilon_n) i_1' = m i_1 \varepsilon_n$.

Prin urmare $\varepsilon_n m' i_1' \simeq m(\varepsilon_n \times \varepsilon_n) i_1' = m i_1 \varepsilon_n \simeq \varepsilon_n$, care implică $m' i_1' \simeq 1_{K(G,n)}$. În mod analog se verifică $m' i_2' \simeq 1_{K(G,n)}$.

Avem apoi $\varepsilon_n m'(m' \times 1) \simeq m(\varepsilon_n \times \varepsilon_n)(m' \times 1) = m(\varepsilon_n m' \times \varepsilon_n) \simeq$
$\simeq m(m(\varepsilon_n \times \varepsilon_n) \times \varepsilon_n) = m(m \times 1)((\varepsilon_n \times \varepsilon_n) \times \varepsilon_n) \simeq$
$\simeq m(1 \times m)((\varepsilon_n \times (\varepsilon_n \times \varepsilon_n)) = m(\varepsilon_n \times (\varepsilon_n \times \varepsilon_n) m) \simeq$
$\simeq m(\varepsilon_n \times \varepsilon_n m') = m(\varepsilon_n \times \varepsilon_n)(1 \times m') \simeq \varepsilon_n m'(1 \times m')$ şi
prin urmare $m'(m' \times 1) \simeq m'(1 \times m')$.

Fie acum inversarea $u: \Omega K(G,n+1) \longrightarrow \Omega K(G,n+1)$
şi fie bijecţia $(\varepsilon_n)_\# : [K(G,n), K(G,n)] \longrightarrow [K(G,n), \Omega K(G,n+1)]$
Există atunci $u': K(G,n) \longrightarrow K(G,n)$ încît $\varepsilon_n u' \simeq u \varepsilon_n$.
Se verifică imediat şi condiţia $m(u' \times 1)\Delta_{K(G,n)} \simeq m'(1 \times u')\Delta_{K(G,n)}$
$\simeq e_{K(G,n)}$, care arată, împreună cu cele de mai sus, că
CW-complexul $K(G,n)$ este un AHI.

8.8. Fie K un CW-complex şi fie Y un spaţiu liniar conex, (n-1)-simplu. Dată o aplicaţie $f: K^{n-1} \longrightarrow Y$, definim
$c(f) \in C_n(K) \frown \pi_{n-1}(Y)$ prin $c(f)(\alpha) = [f \phi_\alpha^n]$,
unde aplicaţia caracteristică ϕ_α^n este privită ca o aplicaţie a lui S^{n-1} în K^{n-1}.

In mod similar, date două aplicaţii $f, g: K^{n-1} \longrightarrow Y$, încît $f \simeq g$ pe K^{n-2} printr-o omotopie $F: K^{n-2} \times I \longrightarrow Y$, definim $d(f,g) \in C_{n-1}(K) \frown \pi_{n-1}(Y)$, considerînd f, g, F ca aplicaţii $\tilde{F}: (K \times I)^{n-1} \longrightarrow Y$ şi punînd $d(f,g) = ((\Theta \frown 1)) c(\tilde{F})$,
unde $\Theta: C(K) \longrightarrow C(K \times I)$ este dinită prin $\Theta(\alpha) = \alpha \times I$.
Să se arate că pentru $n \geq 2$ avem:

(a): $c(f)$ depinde numai de clasa de omotopie a lui f şi că este zero dacă şi numai dacă f are o extensie la o aplicaţie $f: K^n \longrightarrow Y$.

(b): $\delta c(f) = 0$.

(c): $\delta d(f,g) = (-1)^n (c(f) - c(g))$.

(d): Dat $d \in C_{n-1}(K) \frown \pi_{n-1}(Y)$ şi $f: K^{n-1} \longrightarrow Y$, există $g: K^{n-1} \longrightarrow Y$, încît $g = f$ pe K^{n-2} şi $d(f,g) = d$.

(e): Dacă $\gamma(f)$ notează clasa de omologie a lui $c(f)$ în

$H^n(K;\pi_{n-1}(Y))$,atunci $\gamma(f)=0$ dacă şi numai dacă există o aplicaţie $g:K^n \longrightarrow Y$ astfel încît $f=g$ pe K^{n-2}.

Rezolvare.(a).Grupul $C_n(K)=H_n(K^n,K^{n-1})$ este abelian liber,cu generatorii în corespondenţă biunivocă cu n-celulele lui K.Dacă α este un generator,atunci acestuia îi corespunde o aplicaţie caracteristică $\phi_\alpha^n : S^{n-1} \longrightarrow K^{n-1}$ .Putem considera atunci $f\phi_\alpha^n : S^{n-1} \longrightarrow Y$ şi avem $[f\phi_\alpha^n] \in \pi_{n-1}(Y)$ .Dacă $g \simeq f$,atunci,(Propoziţia 7.2.7) , $[g\phi_\alpha^n]=[f\phi_\alpha^n]$.

Apoi,dacă $c(f)=0$,avem $[f\phi_\alpha^n]=0, \forall \phi_\alpha^n$ .Atunci $f\phi_\alpha^n$ are o prelungire $\psi_\alpha^n : E_\alpha^n \longrightarrow Y$.Dar atunci,cum avem $K^n=K^{n-1}\cup_{\phi^n}(\cup E_\alpha^n)$,pentru $\phi^n/S_\alpha^{n-1} = \phi_\alpha^n$,rezultă că putem defini $f':K^n \longrightarrow Y$ încît $f'/K^{n-1}=f$ şi $f'/E_\alpha^n = \psi_\alpha^n$.

Reciproc,dacă f are o prelungire la f',atunci f'/E_α^n este o prelungire pentru $f\phi_\alpha^n$,care implică $[f\phi_\alpha^n]=0$ şi deci $c(f)=0$.

(b) :Avem $c(f):C_n(K) \longrightarrow \pi_{n-1}(Y)$.

Putem de asemenea considera compunerea următoare:

$H_n(K^n,K^{n-1}) \xleftarrow{h_n} \pi_n^*(K^n,K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}^*(K^{n-1}) \xrightarrow{f_*} \pi_{n-1}(Y)$:

După Exerciţiul 8.1, h_n este un izomorfism.Arătăm că avem $c(f)(\alpha)=f_*\,\partial_*\,h_n^{-1}(\alpha)$,sau $c(f)\,h_n=f_*\,\partial_*$.

Fie $\hat{x}\in\pi_n^*(K^n,K^{n-1})$.Atunci x este reprezentată printr-o aplicaţie $\varphi:(E^n,S^{n-1}) \longrightarrow (K^n,K^{n-1})$ şi avem $h_n(\hat{x})=\varphi_*(\bar{\sigma}_n)\in$ $\in H_n(K^n,K^{n-1})$,unde $\bar{\sigma}_n$ este generatorul standard pentru $H_n(E^n,S^{n-1})$.Pentru $\alpha=h_n(\hat{x})$,avem $\phi_\alpha^n = \varphi/S^{n-1}$ şi atunci $c(f)\,h_n(\hat{x})=[f\varphi/S^{n-1}]=f_*\,\partial_*(\hat{x})$ şi prin urmare avem $c(f)=f_*\,\partial_*\,h_n^{-1}$.

Acum,din Propoziţia 8.3.4,avem $h_{n-1}\,\partial_*=(-1)^n\,\partial_*\,h_n$,adică $\partial_*\,h_n^{-1}=(-1)^n\,h_{n-1}^{-1}\,\partial_*$.Prin urmare: $\delta(c(f))=c(f)\partial$,adică

$\delta(c(f))(\beta)=c(f)(\partial\beta)=f_*\partial_*\,h_n^{-1}(\partial\beta)=(-1)^n f_*\,h_{n-1}^{-1}\,\partial_*(\partial\beta)$

Arătăm că homomorfismul

$$H_{n+1}(K^{n+1},K^n) \xrightarrow{\partial} H_n(K^n,K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K^{n-1})$$

este nul. Aceasta are loc deoarece $\partial_* \partial$ coincide cu compunerea

$$H_{n+1}(K^{n+1},K^n) \xrightarrow{\partial_*} H_n(K^n) \xrightarrow{j_*} H_n(K^n,K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K^{n-1})$$

și care este nul deoarece $\partial_* j_* = 0$.

Am arătat astfel că $\delta(c(f))(\beta) = 0, \forall \beta \in H_{n+1}(K^{n+1},K^n)$ și deci $\delta c(f) = 0$.

(c) Fie $f,g: K^{n-1} \longrightarrow Y$, încît $f/K^{n-2} \simeq g/K^{n-2}$ printr-o omotopie $F: K^{n-2} \times I \longrightarrow Y$. Considerăm $(K \times I)^{n-1} = K^{n-1} \times \dot{I} \cup K^{n-2} \times I = K^{n-1} \times 0 \cup K^{n-1} \times 1 \cup K^{n-2} \times I$ și definim $\tilde{F}: (K \times I)^{n-1} \longrightarrow Y$, prin $\tilde{F}/K^{n-1} \times 0 = f$, $\tilde{F}/K^{n-1} \times 1 = g$ și $\tilde{F}/K^{n-2} \times I = F$. Putem considera atunci $c(\tilde{F}): C_n(K \times I) \longrightarrow \pi_{n-1}(Y)$ și dacă $\theta: C_{n-1}(K) \longrightarrow C_n(K \times I)$, este aplicația $\theta(\alpha) = \alpha \times I$, definim $d(f,g) = ((\theta \frown 1))(c(\tilde{F})) = c(\tilde{F})\theta$.

După (b), avem $\delta c(\tilde{F}) = 0$ și deci pentru $\forall \alpha \in C_n(K)$, avem $\delta c(\tilde{F})(\alpha \times I) = 0$, adică $c(\tilde{F})(\partial(\alpha \times I)) = 0$. Dar, după Propoziția 8.5.3 avem $\partial(\alpha \times I) = \partial\alpha \times I + (-1)^n \alpha \times \partial I$, adică $\partial(\alpha \times I) = \partial\alpha \times I + (-1)^n (\alpha \times 1 - \alpha \times 0)$.

Avem deci $0 = c(\tilde{F})(\partial\alpha \times I + (-1)^n (\alpha \times 1 - \alpha \times 0))$, care implică $c(\tilde{F})(\partial\alpha \times I) = (-1)^n (c(\tilde{F})(\alpha \times 0) - c(\tilde{F})(\alpha \times 1)) = (-1)^n (c(f) - c(g))$, deoarece $c(\tilde{F})(\alpha \times 0) = [\tilde{F}\phi_\alpha^n] = c(f)(\alpha)$ și analog $c(\tilde{F})(\alpha \times 1) = c(g)(\alpha)$.

(d) Fie $d \in C_{n-1}(K) \frown \pi_{n-1}(Y)$ și $f: K^{n-1} \longrightarrow Y$. Definim $g: K^{n-1} \longrightarrow Y$, încît, mai întîi, să avem $g/K^{n-2} = f/K^{n-2}$.

Fie apoi $F_0: K^{n-1} \times 0 \cup K^{n-2} \times I \longrightarrow Y$, cu $F_0/K^{n-1} = f$, $F_0/K^{n-2} \times I = f$. Arătăm că F_0 se poate extinde la o aplicație $F: (K \times I)^{n-1} = K^{n-1} \times \dot{I} \cup K^{n-2} \times I$. Fie pentru aceasta α o $(n-1)$-celulă a lui K, cu aplicația caracteristică ϕ_α^{n-1} și considerăm aplicația următoare:

$$E^{n-1} \times 0 \cup S^{n-2} \times I \xrightarrow{\phi_\alpha^{n-1} \times I} K^{n-1} \times 0 \cup K^{n-2} \times I \xrightarrow{F_0} Y$$

Apoi $d(\alpha)\in\pi_{n-1}(Y)$ este reprezentat de o aplicaţie

$$\varphi:((E^{n-1}\times I)^{\cdot}_{S^{n-1}},*)\longrightarrow(Y,*)$$

şi deoarece $E^{n-1}\times 0\cup S^{n-2}\times I$ este spaţiu contractibil, avem $F_\alpha(\phi_\alpha^{n-1}\times I)\simeq\varphi/E^{n-1}\times 0\cup S^{n-2}\times I$. Prin proprietatea de extensie a omotopiei, φ este omotopă cu o aplicaţie $\bar\varphi_\alpha:(E^{n-1}\times I)^{\cdot}\longrightarrow Y$, având proprietatea că $\bar\varphi_\alpha/E^{n-1}\times 0\cup S^{n-2}\times I=F_\alpha(\phi_\alpha^{n-1}\times I)$. Obţinem în felul acesta o aplicaţie $\bar F:(K\times I)^{n-1}\longrightarrow Y$ cu proprietatea că $c(\bar F)\,\theta(\alpha)=c(\bar F)(\alpha\times I)=\bar F(\phi_\alpha^{n-1}\times I)=F_\alpha(\phi_\alpha^{n-1}\times I)=d(\alpha)$. Prin urmare, $c(\bar F)\,\theta=d$, adică $d(f,g)=d$, pentru $g=\bar F/K^{n-1}\times 1$.

(e). Fie $f:K^{n-1}\longrightarrow Y$. Să presupunem mai întîi că f/K^{n-2} are o extensie $g:K^n\longrightarrow Y$. Considerăm atunci $d(f,g/K^{n-1})$ şi avem $\delta d(f,g/K^{n-1})=(-1)^n(c(f)-c(g/K^{n-1}))$. Dar g/K^{n-1} are extensie la K^n şi deci, după (a), $c(g/K^{n-1})=0$. Obţinem deci $c(f)=(-1)^n\partial d(f,g/K^{n-1})$, adică $\gamma(f)=0$, deoarece $c(f)$ este o cofrontieră. Reciproc: fie $c(f)=\delta d$, pentru $d\in C_{n-1}(K)\wedge\pi_{n-1}(Y)$, cu $f:K^{n-1}\longrightarrow Y$. După (d), există $g:K^{n-1}\longrightarrow Y$ încît $g/K^{n-2}=f/K^{n-2}$ şi $d(f,g)=(-1)^n d$. Atunci, $(-1)^n c(f)=\delta d(f,g)=(-1)^n(c(f)-c(g))$, ceea ce arată că $c(g)=0$ şi deci g se poate extinde la K^n.

8.9. Fie K şi L două CW-complexe. Să se arate că există un şir exact

$$0\longrightarrow Z_r(C(K))\otimes C_s(L)\longrightarrow C_r(K)\otimes C_s(L)\xrightarrow{\partial\otimes 1}$$

$$B_{r-1}(C(K))\otimes C_s(L)\longrightarrow 0$$

şi utilizînd Teorema 4.4.2 şi Propoziţia 8.5.3 să se arate că există un şir exact

$$0\longrightarrow\bigoplus_{r+s=n}H_r(K)\otimes H_s(L)\longrightarrow H_n(K\times L)\longrightarrow\bigoplus_{r+s=n-1}\mathrm{Tor}(H_r(K),H_s(L))\to 0$$

Construind un homomorfism convenabil

$$\theta:H_n(K\times L)\longrightarrow\bigoplus_{r+s=n}H_r(K)\otimes H_s(L),$$

să se arate că şirul precedent este scindat şi că

$$H_n(K\bar{\times}L)\simeq \bigoplus_{r+s=n} H_r(K)\otimes H_s(L)\oplus \bigoplus_{r+s=n-1} \mathrm{Tor}(H_r(K),H_s(L))$$

In mod similar, să se arate că

$$\tilde{H}_n(K\bar{\times}L)\simeq \bigoplus_{r+s=n} \tilde{H}_r(K)\otimes \tilde{H}_s(L)\oplus \bigoplus_{r+s=n-1} \mathrm{Tor}(\tilde{H}_r(K),\tilde{H}_s(L)).$$

Rezolvare. Deoarece $C_s(L)$ este grup abelian liber, este clar că şirul

$$0\longrightarrow Z_r(C(K))\otimes C_s(L)\longrightarrow C_r(K)\otimes C_s(L)\xrightarrow{\partial\otimes 1} B_{r-1}(C(K))\otimes C_s(L)\longrightarrow 0$$

este exact. (De fapt este chiar un şir scindat).

Considerăm complexul de lanţuri

$C(K)\otimes C(L)=\bigoplus_n\Big(\bigoplus_{r+s=n} C_r(K)\otimes C_s(L)\Big)$ şi cu $\partial(\alpha\otimes\beta)=$

$=\partial\alpha\otimes\beta+(-1)^r\alpha\otimes\partial\beta$, pentru $\alpha\in C_r(K)$, $\beta\in C_s(L)$. In mod asemănător considerăm complexele de lanţuri $Z(C(K))\otimes C(L)$ şi $B(C(K))\otimes C(L)$. Aplicînd Teorema 4.4.2, obţinem şirul exact

$$\cdots\longrightarrow \bigoplus_{r+s=n} Z_r(C(K))\otimes H_s(L)\longrightarrow H_n(C(K)\otimes C(L))\longrightarrow$$

$$\bigoplus_{r+s=n} H_r(K)\otimes H_s(L)\longrightarrow \bigoplus_{r+s=n-1} Z_r(C(K))\otimes H_s(L)\cdots$$

unde $i_r: B_r(C(K))\longrightarrow Z_r(C(K))$ este incluziunea.

Avem de aici şirul exact

$$0\longrightarrow \bigoplus_{r+s=n} \mathrm{coker}(i_r\otimes(-1)^s)\longrightarrow H_n(C(K)\otimes C(L))$$

$$\bigoplus_{r+s=n-1} \ker((i_r\otimes(-1)^s)\longrightarrow 0$$

Considerînd şirul exact

$$0\longrightarrow B_r(C(K))\longrightarrow Z_r(C(K))\longrightarrow H_r(K)\longrightarrow 0$$

în care $Z_r(C(K))$ este liber, obţinem şirul exact

$$0\longrightarrow \bigoplus_{r+s=n} H_r(K)\otimes H_s(L)\longrightarrow H_n(C(K)\otimes C(L))\longrightarrow$$

$$\bigoplus_{r+s=n-1} \mathrm{Tor}(H_r(K),H_s(L))\longrightarrow 0$$

Dar, din Propoziţia 8.5.3, complexul $C(K)\otimes C(L)$ este izomorf cu complexul $(C(K\overline{\times}L), \partial)$, aşa cum rezultă din diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{r+s=n} C_r(K)\otimes C_s(L) & \xrightarrow{\times} & C_n(K\overline{\times}L) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ \bigoplus_{r+s=n-1} C_r(K)\otimes C_s(L) & \xrightarrow{\times} & C_{n-1}(K\overline{\times}L) \end{array}$$

$\partial\times(\alpha\otimes\beta) = \partial(\alpha\times\beta) = \partial\alpha\times\beta + (-1)^r\alpha\times\partial\beta$ şi pe de altă parte

$\times\partial(\alpha\otimes\beta) = \times(\partial\alpha\otimes\beta + (-1)^r\alpha\otimes\partial\beta) = \partial\alpha\times\beta + (-1)^r\alpha\times\partial\beta$!

Se obţine astfel şirul exact

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{r+s=n} H_r(K)\otimes H_s(L) \xrightarrow{\mu} H_n(K\overline{\times}L) \longrightarrow$$

$$\bigoplus_{r+s=n-1} \mathrm{Tor}(H_r(K), H_s(L)) \longrightarrow 0$$

unde $\mu(\{\alpha\}\otimes\{\beta\}) = \{\alpha\times\beta\}$.

Homomorfismul $\theta : H_n(K\overline{\times}L) \longrightarrow \bigoplus_{r+s=n} H_r(K)\otimes H_s(L)$

se defineşte astfel: dacă $\{z\}\in H_n(K\overline{\times}L)$, atunci $z = \sum_{r+s=n,\, i} x_i^r\times y_i^s$, cu $x_i^r \in C_r(K)$ şi $y_i^s \in C_s(L)$. Din condiţia $\partial(z)=0$, avem $\sum [\partial x_i^r\times y_i^s + (-1)^r x_i^r\times\partial y_i^s] = 0$, care implică $\partial x_i^r = 0$ şi $\partial y_i^s = 0$. Astfel că putem defini $\theta(\{z\}) = \sum \{x_i^r\}\otimes\{y_i^s\}$:

Homomorfismul θ este invers la stînga pentru μ şi prin urmare şirul exact în discuţie este scindat, de unde obţinem:

$$H_n(K\overline{\times}L) \simeq \bigoplus_{r+s=n} H_r(K)\otimes H_s(L) \oplus \bigoplus_{r+s=n-1} \mathrm{Tor}(H_r(K), H_s(L)) :$$

Afirmaţia referitoare la grupul $H_n(K\overline{\wedge}L)$ se obţine luînd în consideraţiile precedente în locul complexelor $C(K)$ şi $C(L)$ complexele $\widetilde{C}(K)$ şi respectiv $\widetilde{C}(L)$ şi utilizînd izomorfismul de complexe de lanţuri $\wedge : \bigoplus_{r+s=n} \widetilde{C}_r(K)\otimes\widetilde{C}_s(K) \longrightarrow C_n(K\overline{\wedge}L)$:

9.10. Fie (K,L) o CW-pereche, încît L este retractă a lui K. Să se arate că, dacă Γ este un inel comutativ cu unitate, atunci

$$H^*(K;G) \cong \operatorname{Im} r^* \oplus \operatorname{Ker} i^*$$

ca sumă directă de grupuri şi că $\operatorname{Im} r^*$ este un subinel şi $\operatorname{Ker} i^*$ este un ideal ($i:L \longrightarrow K$ şi $r:K \longrightarrow L$ sînt respectiv incluziunea şi retracţia).

Luînd $K=CP^2$, $L=CP^1$ şi $G=Z_2$, să se arate că CP^1 nu este retractă a lui CP^2.

Rezolvare: Considerăm şirul exact de coomologie al perechii (K,L):

$$\ldots \longrightarrow H^{n-1}(L;G) \xrightarrow{\partial^*} H^n(K,L;G) \xrightarrow{j^*} H^n(K;G) \xrightarrow{i^*} H^n(L;G) \xrightarrow{\partial} \ldots$$

Avem $ri=1_L$, care implică $i^*r^*=1$ şi deci i^* este epimorfism, care implică $\partial^*=0$. Prin urmare $\operatorname{Ker} j^*=0$. Avem deci şirul scurt exact

$$0 \longrightarrow H^n(K,L;G) \xrightarrow{j^*} H^n(K;G) \xrightarrow{i^*} H^n(L;G) \longrightarrow 0$$

şi deoarece $i^*r^*=1$, rezultă că şirul este scindat. Prin urmare

$$H^n(K;G) \cong H^n(K,L;G) \oplus H^n(L;G) \cong \operatorname{Im} j^* \oplus H^n(L;G) \cong \operatorname{Ker} i^* + \operatorname{Im} r^*,$$

deoarece r^* este monomorfism.

Apoi, conform Teoremei 8.5.2, aplicaţiile

$$r^*:H^*(L;G) \longrightarrow H^*(K;G) \text{ şi } i^*:H^*(K;G) \longrightarrow H^*(L;G)$$

sînt homomorfisme de inele şi deci $\operatorname{Im} r^*$ este un subinel, iar $\operatorname{Ker} r^*$ este un ideal bilateral.

Dacă luăm $K=CP^2$, $L=CP^1$, $G=Z_2$ şi dacă presupunem că CP^1 este retractă pentru CP^2, trebuie să avem:

$H(CP^2;Z_2) \cong \operatorname{Im} r^* + \operatorname{Ker} i^*$, unde $\operatorname{Im} r^*$ este izomorf cu $H^*(CP^1;Z_2)$.

Dar inelul $H^*(CP^2;Z_2)$ este izomorf cu $Z_2[y]$ supus relaţiei $y^3=0$, iar $H^*(CP^1;Z_2)$ este izomorf cu $Z_2[x]$, supus relaţiei $x^2=0$ (Exemplul 8.5.10, pg. 348-349).

Avem deci $H^*(CP^2;Z_2)=\{0,1,y,1+y,y^2,y+y^2,1+y+y^2\}$. Subinelul acestuia, izomorf cu $H^*(CP^1;Z_2)$ este $\{0,1,y^2,1+y^2\}$. Dar atunci $\{0,y,1+y,y+y^2,1+y+y^2\}$ nu este ideal (nu este nici chiar subgrup).

Prin urmare nu poate exista retracţia $r:CP^2 \longrightarrow CP^1$.

8.11. Dat un element $x \in \pi_{2n-1}(S^n)$ $(n \geq 1)$, invariantul Hopf al lui x este definit astfel. Reprezentăm x printr-o aplicație $f: S^{2n-1} \longrightarrow S^n$ și fie $Y = C_f$. Atunci $H^n(Y) \cong Z$, $H^{2n}(Y) \cong Z$, generatorii fiind y_n și respectiv y_{2n}, unde $f_1(y_n) = s_n$, $y_{2n} = f_2(s_{2n})$ și s_n, s_{2n} sînt respectiv generatorii lui $H^n(S^n)$ și $H^{2n}(S^{2n})$. Invariantul Hopf al lui x, $\theta(x)$ este definit atunci prin

$$(y_n)^2 = \theta(x) \cdot y_{2n}.$$

Să se stabilească următoarele rezultate:

(a). $\theta(x)$ depinde numai de x și nu de alegerea lui f.

(b). $\theta : \pi_{2n-1}(S^n) \longrightarrow Z$ este un homomorfism.

(c). $\theta = 0$, dacă n este impar.

(d). Dacă n este par, $\theta[\iota_n, \iota_n] = \pm 2$, unde ι_n este generatorul lui $\pi_n(S^n)$ reprezentat de aplicația identică. Să se arate că dacă n este par, $\pi_{2n-1}(S^n)$ are un element de ordin infinit și că S^n nu poate fi H-spațiu.

Rezolvare. Avem șirul de aplicații continue

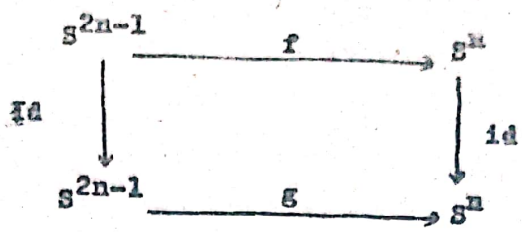
$$S^{2n-1} \xrightarrow{f} S^n \xrightarrow{f_1} C_f \xrightarrow{f_2} s(S^{2n-1}) = S^{2n}$$ și

f_1, f_2 induc homomorfismele

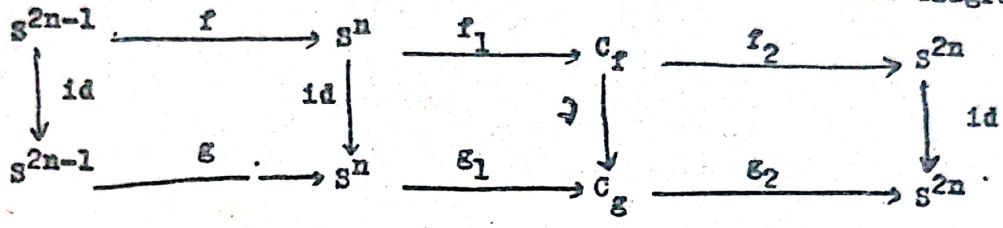
$f_1^* : H^n(C_f) \longrightarrow H^n(S^n)$ și respectiv

$f_2^* : H^{2n}(S^{2n}) \longrightarrow H^{2n}(C_f)$.

Dacă notăm cu s_n generatorul lui $H^n(S^n)$ și cu s_{2n} generatorul lui $H^{2n}(S^{2n})$, atunci $f_1^*(y_n) = s_n$, unde y_n este generatorul lui $H^n(Y) \cong Z$ (deoarece $C_f \simeq S^n \cup_f E^{2n}$) și $f_2^*(s_{2n}) = y_{2n}$ - generatorul lui $H^{2n}(Y)$. Considerînd "cup" produsul $y_n \cup y_n = (y_n)^2 \in H^{2n}(Y)$, există $\theta(x) \in Z$, astfel încît $(y_n)^2 = \theta(x) y_{2n}$ (a). Fie $g: S^{2n-1} \longrightarrow S^n$ alt reprezentant al lui x. Avem următoarea diagramă omotopic comutativă:



Aplicînd Exercițiul 6.11, există o echivalență omotopică $\gamma : C_f \longrightarrow C_g$ încît este omotopic comutativă diagrama:



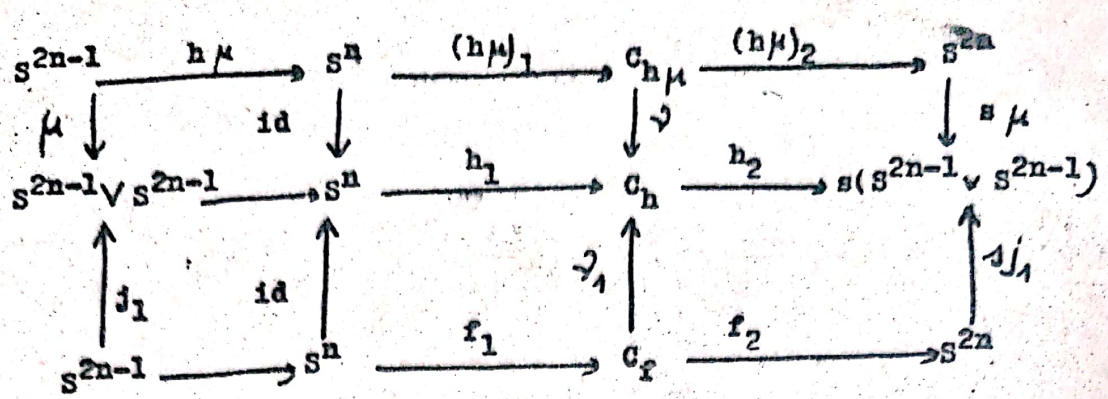
Prin urmare $g_1 \simeq \gamma f_1$, care implică $g_1^* = f_1^* \gamma^*$ și în mod analog, avem $f_2^* = \gamma^* g_2^*$. Fie y_n' generatorul lui $H^n(C_g)$ și y_{2n}' generatorul lui $H^{2n}(C_g)$, încît $g_1^*(y_n') = s_n$ și $g_2^*(s_{2n}) = y_{2n}'$. Avem atunci $f_1^* \gamma^*(y_n') = s_n = f_1^*(y_n)$, care arată că $y_n = \gamma^*(y_n')$. Apoi, $(y_n)^2 = \gamma^*(y_n')^2 = \gamma^*(\theta(x) \cdot y_{2n}') = \theta(x) \cdot \gamma^*(y_{2n}') = \theta(x) \cdot \gamma^* g_2^*(s_{2n}) = \theta(x) \cdot f_2^*(s_{2n}) = \theta(x) \cdot y_{2n}$ și comparînd cu relația $(y_n)^2 = \theta(x) y_{2n}$, obținem $\theta(x) = \theta(x)$.

(b). Fie $x, y \in \pi_{2n-1}(S^n)$, reprezentate respectiv de aplicațiile $f, g : S^{2n-1} \longrightarrow S^n$. Atunci, $x+y$ este reprezentat de aplicația

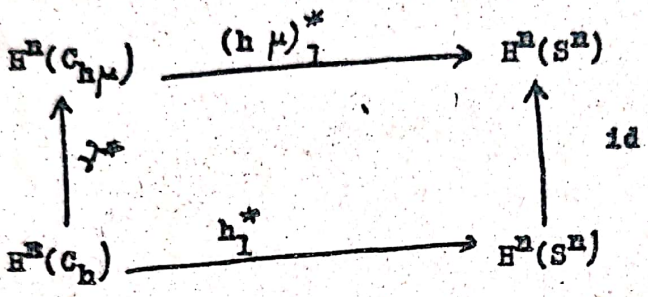
$$S^{2n-1} \xrightarrow{\mu} S^{2n-1} \vee S^{2n-1} \xrightarrow{f \vee g} S^n \vee S^n \xrightarrow{\nabla} S^n$$

unde μ este aplicația de comultiplicare canonică pe S^{2n-1} (vezi Propoziția 6.3.12). Fie $h = \nabla(f \vee g)$. Dacă generatorul lui $H^n(C_{h\mu})$ este z_n și al lui $H^{2n}(C_{h\mu})$ este z_{2n}, încît $(h\mu)_1^*(z_n) = s_n$ și $(h\mu)_2^*(z_{2n}) = z_{2n}$, avem atunci $(z_n)^2 = \theta(x+y) z_{2n}$.

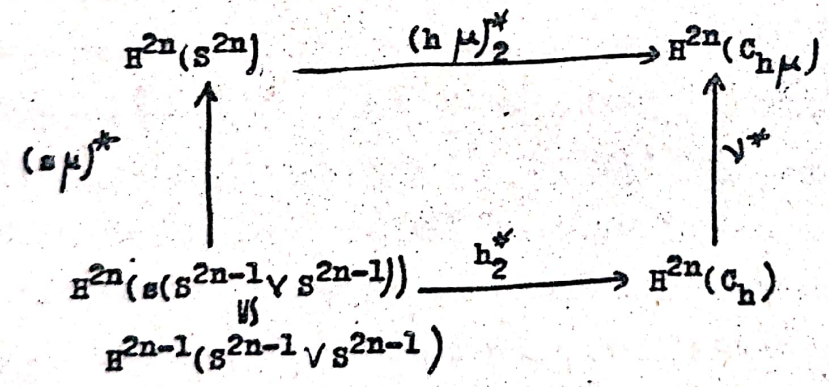
Considerăm diagramele comutative:



De aici deducem diagrama comutativă



Avem $H^n(C_h) \cong Z$, $H^n(C_{h\mu}) \cong Z$ şi dacă luăm γ_n generatorul lui $H^n(C_h)$ pentru care $\nu^*(\gamma_n)=z_n$, atunci $(h\mu)_1^* \nu^*(\gamma_n)=(h\mu)^*(z_n)=s_n$, care implică $s_n=h_1^*(\gamma_n)$. Avem apoi diagrama comutativă



şi dacă ξ', ξ'' sînt generatorii grupului $H^{2n-1}(S^{2n-1} \vee S^{2n-1})$ şi γ'_{2n}, γ''_{2n} ai grupului $H^{2n}(C_h)$, avem $h_2^*(\xi')=\gamma'_{2n}$, $h_2(\xi'')=\gamma''_{2n}$ şi $\nu^*(\gamma'_{2n})=z_{2n}$, $\nu^*(\gamma''_{2n})=z_{2n}$.

Avem apoi $(\gamma_n)^2 \in H^{2n}(C_h)$ şi deci $(\gamma_n)^2 = c_1\gamma'_{2n} + c_2\gamma''_{2n}$.

Să arătăm că $\theta(x)=c_1$, $\theta(y)=c_2$ şi $\theta(x+y)=c_1+c_2$. Avem $\nu^*((\gamma_n)^2)=c_1\nu^*(\gamma'_{2n})+c_2\nu^*(\gamma''_{2n})$, adică $z_n^2=(c_1+c_2)z_{2n}$, care implică $\theta(x+y)=c_1+c_2$.

Din diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} H^{2n-1}(S^{2n-1}\vee S^{2n-1}) & \xrightarrow{h_2^*} & H^{2n}(C_h) \\ \downarrow{\scriptstyle (sj_1)^*} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_1^*} \\ H^{2n}(S^{2n}) & \xrightarrow{f_2^*} & H^{2n}(C_f) \end{array}$$

$\nu_1^*(\gamma'_{2n})=y_{2n}$ -generatorul lui $H^{2n}(C_f)$, $\nu_1^*(\gamma''_{2n})=0$. Avem apoi diagrama comutativă

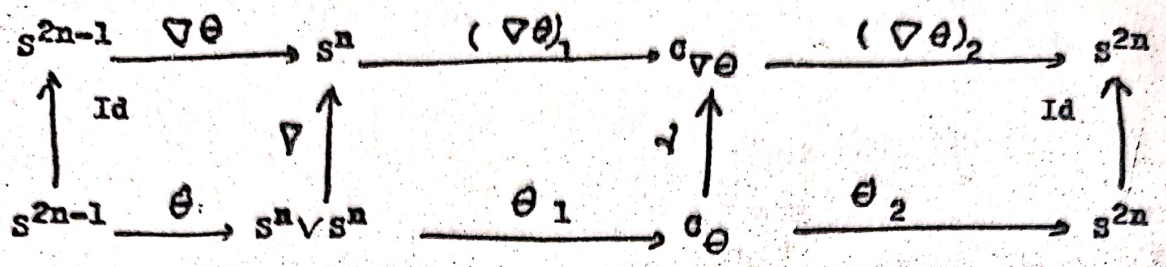
$$\begin{array}{ccc} H^n(C_h) & \xrightarrow{h_1^*} & H^n(S^n) \\ \downarrow{\scriptstyle \nu_1^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} \\ H^n(C_f) & \xrightarrow{f_1^*} & H^n(S^n) \end{array}$$

şi prin urmare $f_1^*(\nu_1^*(\gamma_n))=h_1^*(\gamma_n)=s_n$ şi împreună cu $f_1^*(y_n)=s_n$, obţinem $y_n=\nu_1^*(\gamma_n)+y_n$ fiind generatorul lui $H^n(C_f)$. Atunci $y_n^2=\nu_1^*(\gamma_n)^2=\nu_1^*(c_1\gamma'_{2n}+c_2\gamma''_{2n})=c_1y_{2n}$, care arată că $\theta(x)=c_1$. In mod analog avem $\theta(y)=c_2$.

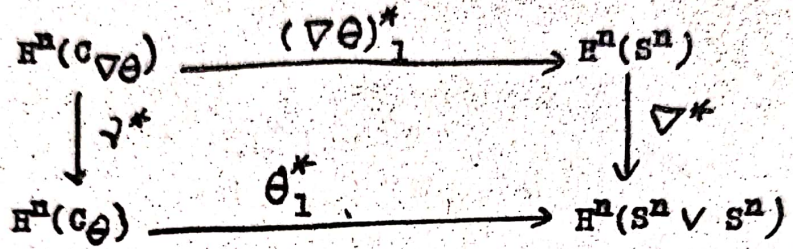
(c) Pentru n impar, avem $y_n^2=(-1)^{n^2}y_n^2$ şi cum n^2 este impar, rezultă $y_n^2=-y_n^2$, deci $y_n^2=0$. Prin urmare $\theta(x)\,y_{2n}=0$, care arată că $\theta(x)=0$, $\forall x\in\pi_{2n-1}(S^n)$.

(d) $[\iota_n,\iota_n]$ este produsul Whitehead (vezi Exerciţiul 6.14) aparţine grupului $\pi_{2n-1}(S^n)$ şi este reprezentat de aplicaţia $S^{2n-1}\xrightarrow{\theta}S^n\vee S^n\xrightarrow{\nabla}S^n$, unde θ are proprietatea că $C_\theta\simeq S^n\times S^n$ (Exerciţiul 6.13).

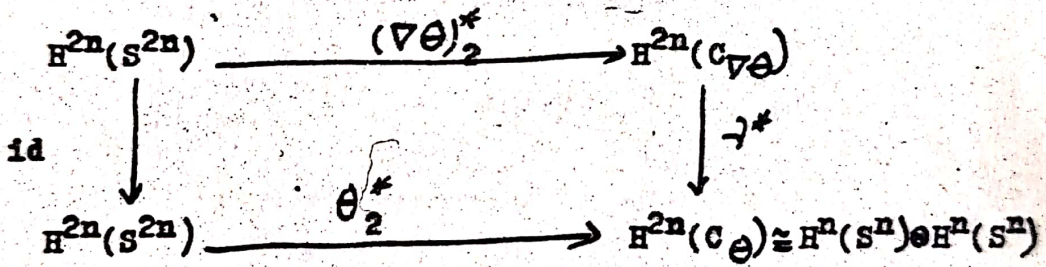
Considerăm următoarea diagramă comutativă:



Aceasta induce diagrama comutativă



Dacă y_n este generatorul lui $H^n(C_{\nabla\theta})$, pentru care $(\nabla\theta)_1^*(y_n) = s_n$ și fie atunci ξ_n', ξ_n'' generatorii grupului $H^n(C_\theta) \cong H^n(S^n \times S^n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ încît $\nu^*(y_n) = \xi_n' + \xi_n''$. Avem apoi diagrama comutativă



Deci $H^{2n}(C)$ este generat de $\xi_n' \cdot \xi_n''$.

Apoi, $(\nabla\theta_2)^*(s_{2n}) = y_{2n}$, $\nu^*(y_{2n}) = \theta_2^*(s_{2n}) = \pm \xi_n' \xi_n''$ și prin urmare $\nu^*(y_{2n}) = \pm \xi_n' \xi_n''$.

Mai departe, $\nu^*(y_n^2) = (\xi_n' + \xi_n'') \cup (\xi_n' + \xi_n'') = (\xi_n')^2 + 2\xi_n'\xi_n'' + (\xi_n'')^2$, dar $(\xi_n')^2 = 0$ și $(\xi_n'')^2 = 0$, deoarece $(\xi_n')^2 = a\xi_n'\xi_n''$ implică $a = 0$. Avem prin urmare $\nu^*(y_n^2) = 2\xi_n'\xi_n''$, adică $\nu^*(y_n^2) = \pm 2\nu^*(y_{2n})$. Deci $y_n^2 = \pm 2y_{2n}$, care arată că $\theta[\iota_n, \iota_n] = \pm 2$

Avem deci $\theta : \pi_{2n-1}(S^n) \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\theta[\iota_n, \iota_n] = \pm 2$, care arată că $[\iota_n, \iota_n] \neq 0$. Aplicînd Exercițiul 6.14 rezultă că S^n nu este H-spațiu, dacă n este par. Este de asemenea evident că $[\iota_n, \iota_n]$ este de ordin infinit în $\pi_{2n-1}(S^n)$.

8.12. Să se arate că, pentru orice $n>1$ și $rs\neq 0$, au loc izomorfismele:

$$\tilde{H}^{r+s}(K(Z,r)\wedge K(Z,s)) \cong Z \text{ și}$$

$$H^{r+s}(K(Z_n,r)\wedge K(Z_n,s);Z_n)\cong Z_n$$

Să se arate că Axiomele 1-4 din Definiția 8.5.1 determină unic produsul $\wedge$ pentru coomologia cu coeficienți în Z sau Z_n.

Rezolvare. Din Exercițiul 5.5, avem :

$$\tilde{H}^{r+s}(K(Z,r)\wedge K(Z,s))\cong \tilde{H}_{r+s}(K(Z,r)\wedge K(Z,s))\pitchfork Z \oplus$$

$$\oplus \operatorname{Ext}(\tilde{H}_{r+s-1}(K(Z,r)\wedge K(Z,s),Z)$$. Apoi, după Exercițiul 8.9,

$$\tilde{H}_{r+s}(K(Z,r)\wedge K(Z,s)) \cong \bigoplus_{r'+s'=r+s-1} \tilde{H}_{r'}(K(Z,r))\otimes \tilde{H}_{s'}(K(Z,s)) \oplus$$

$$\oplus_{r''+s''=r+s-1} \operatorname{Tor}(\tilde{H}_{r''}(K(Z,r)),\tilde{H}_{s''}(K(Z,s))$$. Dar, după Teorema 8.3.3 și Teorema 8.3.7, are loc

$$\tilde{H}_{r'}(K(Z,s)) = \begin{cases} 0, & r'\neq r \\ Z, & r'=r \end{cases}$$

Prin urmare: $H_{r+s}(K(Z,r)\wedge K(Z,s))\cong Z\otimes Z \cong Z$ și

$\tilde{H}_{r'+s'}(K(Z,r)\wedge K(Z,s)) = 0$, pentru $r'+s'\neq r+s$ și prin urmare obținem în final $\tilde{H}^{r+s}(K(Z,r)\wedge K(Z,s))\cong Z$.

Repetînd etapele de mai sus, avem de asemenea:

$$\tilde{H}^{r+s}(K(Z,r)\wedge K(Z,s);Z_n)\cong \tilde{H}_{r+s}(K(Z,r)\wedge K(Z,s))\pitchfork Z_n \oplus$$

$$\oplus \operatorname{Ext}(\tilde{H}_{r+s-1}(K(Z,r)\wedge K(Z,s),Z_n)\cong Z\pitchfork Z_n \cong Z_n.$$

Amintim acum că, pentru un Ω-spectru E, un produs este o mulțime de homomorfisme

$$\wedge : \tilde{H}^r(K;E)\otimes \tilde{H}^s(L;E) \longrightarrow \tilde{H}^{r+s}(K\wedge L;E)$$, pentru toți întregii r,s și toate CW-complexele K,L, cu puncte bază, $x\otimes y \longrightarrow x\wedge y$, astfel încît aceste homomorfisme să satisfacă patru axiome:

Axioma 1. Date aplicaţiile, cu puncte bază, $f:K \longrightarrow M$, $g:L \longrightarrow N$, următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^r(M;E)\otimes\tilde{H}^s(N;E) & \xrightarrow{\wedge} & \tilde{H}^{r+s}(M\barwedge N;E) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*\otimes g^*} & & \downarrow{\scriptstyle (f\barwedge g)^*} \\ \tilde{H}^r(K;E)\otimes\tilde{H}^s(L;E) & \xrightarrow{\wedge} & \tilde{H}^{r+s}(K\barwedge L;E) \end{array}$$

Axioma 2. Produsul este asociativ, adică

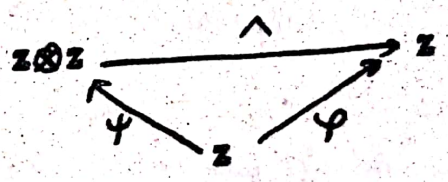
$$\wedge(\wedge\otimes 1)=\wedge(1\otimes\wedge):\tilde{H}^r(K;E)\otimes\tilde{H}^s(L;E)\otimes\tilde{H}^t(M;E)\longrightarrow$$

$$\tilde{H}^{r+s+t}(K\barwedge L\barwedge M;E)$$

Axioma 3. Produsul este anticomutativ, adică, dacă $x\in\tilde{H}^r(K;E)$ şi $y\in\tilde{H}^s(L;E$, atunci $x\wedge y=(-1)^{rs}\tau^*(y\wedge x)$, unde $\tau:K\barwedge L\longrightarrow L\barwedge K$ este aplicaţia ce schimbă ordinea factorilor.

Axioma 4. Există un element $z\in\tilde{H}^1(S^1;E)$ astfel încît, pentru orice $x\in\tilde{H}^r(K;E)$, $s^*(x\wedge z)=x$.

Să considerăm acum $K=K(Z,r)$, $L=K(Z,s)$ şi putem considera diagrama comutativă



unde $\psi:Z\longrightarrow Z\otimes Z$ este izomorfismul $\psi(n)=n\otimes 1$, iar φ este un homomorfism $\varphi(1)=m$ şi deci $\varphi(n)=nm$.

Rezultă că avem $h\wedge k=mhk$. Dar, după Axioma 4, există $z\in\tilde{H}^1(S^1)\cong Z$, încît pentru orice $x\in\tilde{H}^r(K(Z,r))$, avem $s^*(x\wedge z)=x$, adică $s^*(mxz)=x$, deci $m\,s^*(xz)=x$, $\forall\,x$ şi luînd $x=1$, obţinem $ms^*(z)=1$, care implică $m=\pm 1$ şi $s^*(z)=\pm 1$. Obţinem prin urmare $h\wedge k=$ $=\pm hk$, $\forall h\in\tilde{H}^r(K(Z,r)$, $\forall k\in\tilde{H}^s(K(Z,s)$;

De fapt s^* este izomorfismul $s^*:\tilde{H}^1(sS^0) \longrightarrow \tilde{H}^0(S^0)$ şi dacă z este generatorul standard al lui $\tilde{H}^1(S^1)$, atunci $s^*(z)=1$. Astfel că avem $h \wedge k = hk$.

Dacă luăm acum K şi L arbitrare, fie $x=[f] \in \tilde{H}^r(K;Z) = [K;K(Z,r)]$ şi $y=[g] \in \tilde{H}^s(L;Z) = [L;K(Z,s)]$. Putem de asemenea scrie $x=f^*(1)$ şi $y=g^*(1)$. Atunci, aplicînd Axioma 1, avem $x \wedge y = f^*(1) \wedge g^*(1) = \wedge(f^* \otimes g^*)(1 \otimes 1) = (f \times g)^*(1 \wedge 1)$, şi cum $1 \wedge 1$ este unic determinat, egal cu 1, rezultă $x \wedge y = (f \times g)^*(1)$.

In mod similar se procedează pentru coomologia cu coeficienţi în Z_n, plecînd de la diagrama

$$\begin{array}{ccc} Z_n \otimes Z_n & \xrightarrow{\wedge} & Z_n \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & Z_n & \end{array}$$

8.13. Date CW-complexele K, L şi un inel comutativ cu unitate G, definim homomorfismele

$$\backslash : (C_r(L) \uparrow G) \otimes (C_n(K \times L) \otimes G) \longrightarrow C_{n-r}(K) \otimes G$$

prin regula

$$x \backslash [(\alpha \times \beta) \otimes g] = \begin{cases} \alpha \otimes (x(\beta) \cdot g), & \alpha \in C_{n-r}(K),\ \beta \in C_r(L) \\ 0, \text{în rest.} \end{cases}$$

Să se arate că $(\partial \otimes 1)(x \backslash y) = x \backslash [(\partial \otimes 1) y] + (-1)^{n-r} \delta x \backslash y$ şi să se arate că $\backslash$ induce "produsele"

$$\backslash : H^r(L;G) \otimes H_n(K \times L;G) \longrightarrow H_{n-r}(K;G)$$

Să se stabilească următoarele proprietăţi:

(a) Date aplicaţiile $f:K \longrightarrow M$, $g:L \longrightarrow N$, atunci $f_*(g^* x \backslash y) = x \backslash [(f \times g)_* y]$.

(b) Dat $x \in H^r(L;G)$, $y \in H^s(M;G)$ şi $z \in H_n(K \times L \times M;G)$, atunci

$$(x \times y) \backslash z = x \backslash (y \backslash z).$$

(c) Dat $x \in H^n(K;G)$ şi $y \in H_n(K;G)$, atunci $x \backslash y = \langle x, y \rangle$ în

$H_0(P;G)=G$, unde P constă dintr-un singur punct şi y este privit ca un element din $H_n(P\times K;G)$.

(d). Cînd K este un poliedru, $x\in H^r(K;G)$ şi $y\in H_n(K;G)$, atunci $x\cap y = x\setminus \Delta_*(y)$, unde $\Delta : |K| \longrightarrow |K|\times|K|$ este aplicaţia diagonală.

Să se stabilească rezultate similare pentru coomologia redusă, considerînd $\bar{\setminus}$ în locul lui $\setminus$.

Rezolvare. Avem $C_n(K\bar{\times}L) \cong \bigoplus_{r+s=n} C_r(K)\otimes C_s(L)$.

Verificăm prima formulă, pentru $x\in C_r(K)\wedge G$ şi $y=(\alpha\times\beta)\otimes g$

Dacă $\alpha\in C_{n-s}(K)$, $\beta\in C_s(L)$, distingem două situaţii:

(i) $s\neq r$. In acest caz $x\setminus y=0$, deci $(\partial\otimes 1)(x\setminus y)=0$.

Apoi $x\setminus[(\partial\otimes 1)y] = x\setminus[(\partial\alpha\times\beta)\otimes g] + (-1)^{n-s} x\setminus[(\alpha\times\partial\beta)\otimes g]$

$$= \begin{cases} (-1)^{n-r-1}\alpha\otimes(x(\partial\beta)\cdot g), & s=r+1 \\ 0, & s\neq r+1 \end{cases}$$

Pe de altă parte,

$(-1)^{n-r}\delta x\setminus y = (-1)^{n-r}\alpha\otimes[(\delta x)(\beta)\cdot g] = (-1)^{n-r}\alpha\otimes(x(\partial\beta)\cdot g)$, dacă $s=r+1$ şi $(-1)^{n-r}\delta x\setminus y=0$, pentru $s\neq r+1$ (şi $s\neq r$).

Prin urmare $x\setminus[(\partial\otimes 1)y] + (-1)^{n-r}\delta x\setminus y = 0 = (\partial\otimes 1)(x\setminus y)$.

(ii) $s=r$. In acest caz $(\partial\otimes 1)(x\setminus y) = \partial\alpha\otimes(x(\beta)\cdot g)$; $x\setminus[(\partial\otimes 1)y] = \partial\alpha\otimes(x(\beta)\cdot g)$ şi $(-1)^{n-r}\delta x\setminus y = 0$. Formula se verifică deci şi în acest caz.

Putem defini atunci

$\setminus : H^r(L;G)\otimes H_n(K\bar{\times}L;G) \longrightarrow H_{n-r}(K;G)$, astfel:

dacă $x\in C_r(L)\wedge G$ este un cociclu şi $y\in C_n(K\bar{\times}L)\otimes G$ este un ciclu, atunci $(\partial\otimes 1)(x\setminus y)=0$ şi deci $x\setminus y$ este un ciclu.

Apoi, dacă $x=\delta x'$, avem $x\setminus y = \delta x'\setminus y = (-1)^{n-r}[(\partial\otimes 1)(x'\setminus y) - x'\setminus(\partial\otimes 1)y] = (-1)^{n-r}(\partial\otimes 1)(x'\setminus y)$. In sfîrşit, dacă $y=(\partial\otimes 1)y'$, avem $x\setminus y = (-1)^{n-r}(\partial\otimes 1)(x\setminus y')$.

Putem defini deci $[x]\setminus[y] = [x\setminus y]$.

Să stabilim acum proprietăţile enunţate:

(a): Fie $x \in C_r(N) \wedge G$, $y = (\alpha \times \beta) \otimes \gamma \in C_n(M \times N) \otimes G$. Atunci

$$f_*(g^* x \setminus y) = \begin{cases} f_*(\alpha \otimes (g^* x(\beta)) \cdot \gamma) & \text{, dacă } \alpha \in C_{n-r}(M), \beta \in C_r(N) \\ 0, \text{în rest} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} f_*(\alpha) \otimes (x(g_*(\beta)) \cdot \gamma) & \text{, dacă } \alpha \in C_{n-r}(M),\ \beta \in C_r(N) \\ 0, \text{în rest} \end{cases}$$

Apoi,

$$x \setminus [(f \times g)_* y] = x \setminus [(f_*(\alpha) \times g_*(\beta)) \cdot \gamma] =$$

$$= \begin{cases} f_*(\alpha) \otimes [x(g_*(\beta)) \cdot \gamma] & , \alpha \in C_{n-r}(M),\ \beta \in C_r(N) \\ 0, \text{în rest,} \end{cases}$$

de unde, trecînd la clase obţinem formula.

(b): Fie $z = (\alpha \times \beta \times \gamma) \otimes g$ şi $y \in C_s(M) \wedge G$, atunci

$$y \setminus z = \begin{cases} (\alpha \times \beta) \otimes (y(\gamma) \cdot g) & \text{, dacă } (\alpha \times \beta) \in C_{k-l}(K \times L),\ \gamma \in C_s(M) \\ 0, \text{în rest} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \alpha \otimes (x(\beta) \cdot y(\gamma) \cdot g) & \text{, dacă } \alpha \in C_{k-l-s}(K),\ \beta \in C_l(L),\ \gamma \in C_s(M) \\ 0, \text{în rest} \end{cases}$$

Apoi, $(x \times y) \setminus (\alpha \times \beta \times \gamma) \otimes g =$

$$= \begin{cases} \alpha \otimes ((x \times y)(\beta \times \gamma) \cdot g & , \alpha \in C_{k-l-s}(K),\ \beta \times \gamma \in C_{l+s}(L \times M) \\ 0, \text{în rest} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \alpha (x(\beta) \cdot y(\gamma) \cdot g) & \text{, dacă } \alpha \in C_{k-l-s}(K),\ \beta \in C_l(L),\ \gamma \in C_s(M) \\ 0, \text{în rest} \end{cases}$$

Trecînd la clase obţinem formula din enunţ.

(c): Avem produsul

$$\setminus : H^n(K;G) \otimes H_n(P \times K;G) \longrightarrow H_0(P;G) = G$$

şi anume, pentru $x \in C_r(K) \wedge G$, $y = (P \times \beta) \otimes g \in C_n(P \times K) \otimes G$, avem $x \setminus y = P \otimes (x(\beta) \cdot g) = x(\beta) \cdot g$. Avem apoi produsul Kronecker

$$\langle\ ,\ \rangle : H^n(K;G) \otimes H_n(K;G) \longrightarrow G$$

, definit prin

$$\langle [x], [\beta \otimes g] \rangle = x(\beta) \cdot g = [x] \setminus [y]$$.

(d). Fie $x \in C_r(K) \wedge G, y = \alpha \otimes g \in C_r(K) \otimes G$. Avem atunci $x \cap y = \alpha' \otimes (x(\alpha'').g)$ (vezi Propoziţia 5.2.10). Apoi, $\Delta_\#(\alpha \otimes g) = (\alpha' \times \alpha'') \otimes g$ şi atunci $x \setminus \Delta_\#(y) = x \setminus [(\alpha' \times \alpha'') \otimes g] = \alpha' \otimes (x(\alpha'').g) = x \cap y$.

Pentru cecmologia redusă se poate defini homomorfismul

$$\setminus : \tilde{C}_r(L) \wedge G \otimes (C_n(K \tilde{\times} L) \otimes G) \longrightarrow \tilde{C}_{n-r}(K) \otimes G \quad \text{prin}$$

$$x \setminus [(\alpha \wedge \beta) \otimes g] = \begin{cases} \alpha \otimes (x(\beta) \cdot g) & \text{, dacă } \alpha \in C_{n-r}(K), \\ & \beta \in C_r(L) \\ 0, \text{în rest} & \end{cases}$$

şi se aplică rezultatele Teoremei 8.5.5.

8.14. Fie K o triangulare a unei n-varietăţi omologice orientabile şi fie L un subcomplex al lui K. Fie $\bar{L}$ suplimentul lui L în K, astfel că un simplex al lui K' (cu ordinea uzuală este $(a^0, \ldots, a^n)$, unde $(a^0, \ldots, a^{r-1}) \in \bar{L}$ şi $(a^r, \ldots, a^n) \in L'$. Fie $N(\bar{L})$ mulţimea punctelor din asemenea simplexe de forma $\sum \lambda_i a^i$, unde $\lambda_0 + \ldots + \lambda_{r-1} > 1/2$ şi fie $N(L)$ mulţimea punctelor pentru care $\lambda_r + \ldots + \lambda_n > 1/2$.

(a). Să se arate că $|\bar{L}|$ şi $|L|$ sînt retracte tare de deformare pentru $N(\bar{L})$ şi respectiv $N(L)$.

(b). Fie M un subcomplex al lui L, astfel încît $N(M) \subset N(L)$, $N(\bar{L}) \subset N(\bar{M})$ şi $|K| = N(\bar{L}) \cup N(M) \cup (N(\bar{M}) \cap N(L))$. Să se arate că există echivalenţele omotopice:

$p : (N(\bar{M}), N(\bar{L})) \longrightarrow (|\bar{M}|, |\bar{L}|)$ şi $q : (N(L), N(M)) \longrightarrow (|L|, |M|)$

(c). După (b se poate defini aplicaţia

$$\Delta : |K| \longrightarrow (|\bar{M}| / |\bar{L}|) \wedge (|L| / |M|) \text{ , prin}$$

$$\Delta(x) = \begin{cases} p(x) \wedge q(x) & \text{, dacă } x \in N(\bar{M}) \cap N(L), \\ \text{punctul bază, în rest} & \end{cases}$$

Se defineşte de asemenea un homomorfism

$$d : C(K') \longrightarrow C((|\bar{M}| / |\bar{L}|) \wedge (|L'| / |M'|)) \quad \text{prin}$$

$d([a^0, \ldots, a^n]) = \sum [a^0, \ldots, a^r] \wedge [a^r, \ldots, a^n]$, suma fiind luată după r încît $(a^0, \ldots, a^r)$ este un simplex al lui $\bar{M} - \bar{L}$ şi

$(a^r,\dots,a^n)$ este un simplex al lui $L'-M'$.

Să se arate că d este o aplicaţie de lanţuri şi induce aceleaş homomorfisme în omologie şi coomologie ca şi Δ.

(d) Fie $\bar{D}: H^r(L',M') \longrightarrow H_{n-r}(\bar{M},\bar{L})$ izomorfismul de dualitate din Teorema 5.3.13 compus cu $(\tilde{h})^{-1}$, unde $h:(|L'|,|M'|) \longrightarrow (|L|,|M|)$ este o aproximare simplicială a identităţii. Să se arate că

$$\bar{D}(x) = x \cap \Delta_*(z),$$

unde $z \in H_n(K) = \tilde{H}_n(K)$ este generatorul standard şi deci să se arate că dacă $y \in H^{n-r}(\bar{M},\bar{L})$, atunci

$$\bar{D}\,\Delta^*(y \smile x) = \langle y, \bar{D}(x)\rangle h_o,$$

unde $\bar{D}$ notează de asemenea izomorfismul de dualitate Poincaré $H^n(K') \cong H_o(K')$ şi h_o este clasa de omologie a oricărui vîrf al lui K'.

Să se stabilească rezultate similare pentru varietăţi omologice neorientabile, utilizînd coeficienţi în Z_2.

Rezolvare.

(a). Definim retracţiile $r: N(\bar{L}) \longrightarrow |\bar{L}|$ prin

$$r\Big(x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a^i\Big) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{r-1}\lambda_i} \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i a^i \text{ şi } r': N(L) \longrightarrow |L| = |L'|$$

cu $r'\Big(x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a^i\Big) = \frac{1}{\sum_{j=r}^{n}\lambda_j} \sum_{j=r}^{n} \lambda_j a^j$. Dacă $i: |\bar{L}| \to N(\bar{L})$ este incluziunea, atunci avem $ri = id$ şi $ir \simeq id$ rel $|\bar{L}|$ printr-o omotopie liniară (vezi şi Propoziţia 5.3.9). In mod analog, pentru incluziunea $i': |L| \longrightarrow N(L)$, avem $r'i' = id$ şi $i'r' \simeq id$ rel $|L|$.

(b). Retracţia $r: N(\bar{L}) \longrightarrow |\bar{L}|$ se poate extinde la o aplicaţie continuă $\rho: (N(\bar{M}), N(\bar{L})) \longrightarrow (N(\bar{M}), N(\bar{L}))$, astfel că $\rho \simeq id$ rel $|\bar{M}|$. Definim atunci $p = \rho p': (N(\bar{M}), N(\bar{L})) \longrightarrow (|\bar{M}|, |\bar{N}|)$.

În mod asemănător se construieşte echivalenţa omotopică

$q:(N(L), N(M)) \longrightarrow (|L|, |M|)$

(c)&plicaţia $\Delta : |K| \longrightarrow (|M|/|L| \wedge |K|/|M|)$ este bine definită, deoarece $p(N(\bar{L})) \subset |\bar{L}|$ şi $q(N(M)) \subset |M|$ şi

$|K| = N(\bar{L}) \cup N(M) \cup (N(\bar{M}) \cap N(L))$!

Să arătăm că d este o aplicaţie de lanţuri. Avem

$d[a^0,\ldots,a^n] = \sum [a^0,\ldots,a^r] \wedge [a^r,\ldots,a^n]$, pentru $(a^0,\ldots,a^r) \in \bar{M}-\bar{L}$ şi $(a^r,\ldots,a^n) \in M'-L'$. Din Teorema 8.5.5, avem

$$\partial d[a^0,\ldots,a^n] = \sum_{r=0}^{n} \partial[a^0,\ldots,a^r] \wedge [a^r,\ldots,a^n] +$$

$$+(-1)^r [a^0,\ldots,a^r] \wedge \partial[a^r,\ldots,a^n] = \sum_{r=0}^{n} \Big(\sum_{s=0}^{r-1} (-1)^s [a^0,\ldots \hat{a}^s,\ldots a^r]$$

$$\wedge [a^r,\ldots,a^n] + (-1)^r [a^0,\ldots,a^{r-1}] \wedge [a^r,\ldots,a^n] +$$

$$+ \sum_{s=r+1}^{n} (-1)^s [a^0,\ldots,a^r] \wedge [a^r,\ldots,\hat{a}^s,\ldots,a^n] +$$

$$+(-1)^r [a^0,\ldots,a^r] \wedge [a^{r+1},\ldots,a^n] \Big) = d\ a^0,\ldots,a^n \ !$$

Se construieşte apoi o omotopie de lanţuri între d şi $\bar{\Delta}$, unde $\bar{\Delta}$ este o aproximare celulară pentru Δ. Pentru aceasta, dat un simplex $\sigma = (a^0,\ldots,a^n) \in K'$, cu $a^0,\ldots,a^{r-1} \in \bar{L}$, $a^r,\ldots,a^{s-1} \in \bar{M} \cap L'$ şi $a^s,\ldots,a^n \in M'$. Se arată prin inducţie (vezi Teorema 8.5.6), că $\bar{\Delta}(\sigma) \subset (a^0,\ldots,a^{s-1}) \wedge (a^r,\ldots,a^n)$. Construim prin inducţie după m omotopia h_m. Pe $C_0(K)$, avem $\bar{\Delta}_0 = d$ şi putem lua $h_0 = 0$. Presupunem apoi că am construit

$h_{n-1} : C_{n-1}(K') \longrightarrow C_n(|\bar{M}|/|\bar{L}| \wedge |L|/|M|)$, încît

$\partial h_{n-1}(\sigma) + h_{n-2}\partial(\sigma) = \bar{\Delta}_{n-1}(\sigma) - d(\sigma)$ şi astfel încît să avem $h_{n-1}(\sigma) \in C_n((a^0,\ldots,a^{s-1}) \wedge (a^r,\ldots,a^{n-1}))$, pentru toate $(n-1)$-simplexele $\sigma = (a^0,\ldots,a^{n-1}) \in K'$. Se defineşte atunci h_n. Anume, constatăm mai întîi că $\partial[-h\partial(\sigma) + \bar{\Delta}_n(\sigma) - d(\sigma)] =$

$= -(\partial h)(\partial\sigma) + \bar{\Delta}\partial(\sigma) - d\partial(\sigma) = (h\partial)(\partial\sigma) - \bar{\Delta}\partial(\sigma) + d\partial(\sigma) +$

$+ \bar{\Delta}\partial(\sigma) - d\partial(\sigma) = 0$, pentru orice n-simplex $\sigma \in K$!

Dar $-h\partial(\sigma)+\overline{\Delta}_*(\sigma)-d(\sigma)$ este un element din $C_n((a^0,\dots,a^{s-1})\wedge(a^r,\dots,a^n))$ și, cum $(a^0,\dots,a^{s-1})\wedge(a^r,\dots,a^n)$ este contractibil, rezultă $H_n((a^0,\dots,a^{s-1})\wedge(a^r,\dots,a^n))=0$ și deci există $h_n(\sigma)\in C_{n+1}((a^0,\dots,a^{s-1})\wedge(a^r,\dots,a^n))$, încît să avem $\partial h_n(\sigma)+h_{n-1}\partial(\sigma)=\overline{\Delta}_*(\sigma)-d(\sigma)$.

(d). Avem, ținînd seama de Teorema 5.3.13 (pg.178-179), $\overline{D}(x)=x\cap\phi_*(z)$. Aplicînd apoi Exercițiul 8.13(d), pentru coomologi redusă, obținem $\overline{D}(x)=x\setminus\Delta_*(z)$.

Fie acum $y\in H^{n-r}(\overline{M},\overline{L})$, $x\in H^r(L',M')$. Avem $y\wedge x\in H^n(|\overline{M}|/|\overline{L}|\cup|L'|/|M'|)$ și $\overline{D}\Delta^*(y\wedge x)=\left[(\Delta^*(y\wedge x)\cap\phi_*(z)\right]h_0=\left[y\wedge x\right]\cap\Delta_*\phi_*(z)]h_0=$ $=y\cap[x\setminus\Delta_*(z)]h_0$. Pe de altă parte, $\langle y,\overline{D}(x)\rangle h_0=$ $=y\cap[x\setminus\Delta_*(z)]h_0=\overline{D}\Delta^*(y\wedge x)$.

Rezultatele pentru varietăți omologice neorientabile, utilizînd grupul Z_2 ca grup de coeficienți, se transcriu ușor din cele de mai sus.

8.15. Fie K un complex simplicial. Să se arate că, pentru orice întreg $r\geq 0$, există un homomorfism

$$d_r: C(K)\otimes Z_2 \longrightarrow C(|K|\times|K|)\otimes Z_2$$

cu următoarele proprietăți:

(a) $d_0^*=\Delta^*$, unde Δ este aplicația diagonală.

(b) $d_r\left[C_n(K)\otimes Z_2\right]\subset C_{n+r}(|K|\times|K|)\otimes Z_2$.

(c) $\partial d_r+d_r\partial=(1+\tau)d_{r-1}$, unde $\tau: C(|K|\times|K|)\otimes Z_2\longrightarrow C(|K|\times|K|)\otimes Z_2$ este aplicația de lanțuri ce ce schimbă între ei doi factori.

(d). Pentru orice simplex σ, $d_r(\sigma\otimes 1)\in C(\sigma\times\sigma)\otimes Z_2$.

(e). Dacă $d_0', d_1', d_2', \dots$ este o altă mulțime de asemenea homomorfisme, atunci există homomorfismele $h_r: C(K)\otimes Z_2\longrightarrow C(|K|\times|K|)\otimes Z_2$ $(r\geq 0)$, astfel încît $d_r+d_r'=\partial h_r+h_r\partial+(1+\tau)h_{r-1}$

(B). Presupunem că $x\in C_n(K)\frown Z_2$, $y\in C_m(K)\frown Z_2$ și definim

$$x\cup_r y=(d_r\frown 1)(x\times y)\in C_{n+m-r}(K)\frown Z_2.$$

Să se arate că $\delta(x \cup_r y) = \delta(x) \cup_r y + x \cup_r \delta(y) + x \cup_{r-1} y + y \cup_{r-1} x$ și deci se poate defini

$$Sq^r : H^n(K;Z_2) \longrightarrow H^{n+r}(K;Z_2) \text{ prin}$$

$Sq^r[x] = [x \cup_{n-r} x]$.

Să se arate că Sq^r este bine definită (adică este independentă de alegerea lui d_{n-r} și x) și are următoarele proprietăți:

(a). Sq^r este homomorfism

(b). Dacă $f: |K| \longrightarrow |L|$ este aplicație continuă, atunci $f^* Sq^r = Sq^r f^*$.

(c). Sq^0 este izomorfismul identitate.

(d). $Sq^r(x) = x^2$, dacă $x \in H^r(K;Z_2)$.

(e). $Sq^r(x) = 0$, dacă $x \in H^n(K;Z_2)$, $n < r$.

(f). Dacă $x \in H^n(K;Z_2)$ și $y \in H^m(L;Z_2)$, atunci

$$Sq^r(x \times y) = \sum_{i=0}^{r} (Sq^{r-i}x) \times (Sq^i y) \text{ în } H^{n+m+r}(|K| \times |L|; Z_2).$$

(g). Să se extindă definiția lui Sq^r la $H^n(K;Z_2)$ și $H^n(K,L;Z_2)$ și să se arate că:

(h). Dacă δ^* este homorfism în șirul exact de coomologie al perechii (K,L), atunci $\delta^* Sq^r = Sq^r \delta^*$.

(i). Dacă $s^*: H^{n+1}(SK;Z_2) \longrightarrow H^n(K;Z_2)$ este izomorfismul de suspensie, atunci $s^* Sq^r = Sq^r s^*$.

Rezolvare.

(A). Considerăm pentru r=0 homomorfismul din Teorema 8.5.6,

$d_0 = d \otimes 1 : C_n(K) \otimes Z_2 \longrightarrow C_{n+r}(|K| \times |K|) \otimes Z_2$,

$d_0[a^{i_0}, \ldots, a^{i_n}] \otimes 1 = \sum_{j=0}^{n} [a^{i_0}, \ldots, a^{i_r}] \times [a^{i_r}, \ldots, a^{i_n}] \otimes 1$. Conform Teoremei 8.5.6, d și Δ sînt omotope și rezultă că $d \otimes 1$ și $\Delta \otimes 1$ sînt omotope, care arată că avem $d_0^* = \Delta^*$.

Mai luăm $d_r = 0, r > n$ și presupunem că am construit d_{r-1} și d_r pe $C_k(K) \otimes Z_2$, pentru $k < n$. Fie $(\sigma \otimes 1) \in C_n(K) \otimes Z_2$. Avem atunci $d_r \partial (\sigma \otimes 1) + (1 + \tau) d_{r-1}(\sigma \otimes 1) \in C(\sigma \times \sigma)$. Arătăm că acesta

este un ciclu. Avem $\partial\left[d_r\,\partial(\sigma\otimes 1)+(1+\tau)\,d_{r-1}(\sigma\otimes 1)\right]=$
$=\partial d_r\partial(\sigma\otimes 1)+(1+\tau)\,\partial\,d_{r-1}(\sigma\otimes 1)=((1+\tau)\,d_{r-1}+d_r\partial)$
$(\partial(\sigma\otimes 1))+(1+\tau)\,\partial\,d_{r-1}(\sigma\otimes 1)=(1+\tau)\,d_{r-1}\,\partial(\sigma\otimes 1)+$
$+(1+\tau)\,\partial\,d_{r-1}(\sigma\otimes 1)=(1+\tau)\left[(1+\tau)\,d_{r-2}(\sigma\otimes 1)\right]=$
$=(1+\tau)\left[d_{r-2}(\sigma\otimes 1)+\tau\,d_{r-2}(\sigma\otimes 1)\right]=d_{r-2}(\sigma\otimes 1)+$
$+\tau\,d_{r-2}(\sigma\otimes 1)+\tau\,d_{r-2}(\sigma\otimes 1)+\tau^2 d_{r-2}(\sigma\otimes 1)=0$, deoarece coeficienţii sînt în Z_2. Prin urmare, lanţul considerat este un ciclu în $C(\sigma\times\sigma)\otimes Z_2$ şi, deoarece acest complex este aciclic, există $d_r(\sigma\otimes 1)\in C_{n+r}(|K|\times|K|)\otimes Z_2$, încît
$d_r\partial(\sigma\otimes 1)+(1+\tau)\,d_{r-1}(\sigma\otimes 1)=\partial d_r(\sigma\otimes 1)$. Corespondenţa
$(\sigma\otimes 1)\longrightarrow d_r(\sigma\otimes 1)$ este extinsă prin liniaritate la un homorfism $d_r: C_n(K)\otimes Z_2\longrightarrow C_{n+r}(|K|\times|K|)\otimes Z_2$.
Condiţiile (b), (c), (d) sînt în mod evident verificate.
Pentru a verifica (e), să presupunem că avem homorfismele
$d_r, d'_r: C_n(K)\otimes Z_2\longrightarrow C_{n+r}(|K|\times|K|)\otimes Z_2$, satisfăcînd ambele sisteme de homomorfisme condiţiile (a), (b), (c), (d).
Vom construi homomorfismele $h_r: C_n(K)\otimes Z_2\longrightarrow C_{n+r+1}(|K|\times|K|)\otimes Z_2$ astfel: deoarece $(d'_0)^*=d_0^*=\Delta^*$, avem $d'_0/C_0(K)\otimes Z_2=d_0/C_0(K)\otimes Z_2$ şi deoarece $H_*(\sigma\times\sigma;Z_2)=0$, rezultă că d'_0 şi d_0 sînt aplicaţii de lanţuri omotope. Luăm atunci h_0 omotopia acestora şi pentru $h_{-1}=0$ se verifică relaţia $d_0+d'_0=\partial h_0+h_0\partial+(1+\tau)\,h_{-1}$.
Presupunem că am construit h_{r-1} şi h_r pe $C_k(K)\otimes Z_2$, pentru $k<n$.
Fie $(\sigma\otimes 1)\in C_n(K)\otimes Z_2$. Arătăm că avem
$(d_r+d'_r+h_r\partial+(1+\tau)\,h_{r-1})(\sigma\otimes 1))$ un ciclu. În adevăr:
$\partial\left[d_r(\sigma\otimes 1)+d'_r(\sigma\otimes 1)+h_r\partial(\sigma\otimes 1)+(1+\tau)\,h_{r-1}(\sigma\otimes 1)\right]=$
$=d_r\partial(\sigma\otimes 1)+(1+\tau)\,d_{r-1}(\sigma\otimes 1)+d'_r\partial(\sigma\otimes 1)+(1+\tau)\,d'_{r-1}$
$(\sigma\otimes 1)+\left[d_r+d'_r+h_r\partial+(1+\tau)\,h_{r-1}\right]\partial(\sigma\otimes 1)+$
$+(1+\tau)\,\partial\,h_{r-1}(\sigma\otimes 1)=(1+\tau)\,d_{r-1}(\sigma\otimes 1)+(1+\tau)\,d'_{r-1}(\sigma\otimes 1)+$
$+(1+\tau)\,h_{r-1}\partial(\sigma\otimes 1)+(1+\tau)\partial\,h_{r-1}(\sigma\otimes 1)=$
$=(1+\tau)\left[d_{r-1}+d'_{r-1}+h_{r-1}\partial+\partial h_{r-1}\right](\sigma\otimes 1)=0$.

Raţionînd ca în construţia lui d_r, există $h_r(\sigma \otimes 1)$, astfel încît

$\partial h_r(\sigma \otimes 1) = (d_r + d'_r + h_r \partial + (1+\tau) h_{r-1})(\sigma \otimes 1)$.

(B): $\delta(x \cup_r y)(\sigma) = (x \cup_r y)(\partial\sigma) = (x \times y)(d_r \partial\sigma) =$
$= (x \times y)(\partial d_r\sigma + (1+\tau) d_{r-1}\sigma) = (x \times y)(\partial d_r\sigma + d_{r-1}\sigma + \tau d_{r-1}\sigma) =$
$= \delta(x \times y)(d_r\sigma) + (x \times y)(d_{r-1}\sigma) + \tau d_{r-1}\sigma = (\delta x \times y)(d_r\sigma) +$
$+ (x \times \delta y)(d_{r-1}\sigma) + \tau d_{r-1}\sigma = (\delta x \times y)(d_r\sigma) + (x \times \delta y)(d_r\sigma) +$
$+ (x \times y)(d_{r-1}\sigma) + (x \times y)(\tau(d_{r-1}\sigma))$.

Apoi: $(\delta(x) \cup_r y)(\sigma) = (\delta x \times y)(d_r\sigma)$;
$(x \cup_r \delta y)(\sigma) = (x \times \delta y)(d_r\sigma)$; $(x \cup_{r-1} y)(\sigma) = (x \times y)(d_{r-1}\sigma)$;
$(y \cup_{r-1} x)(\sigma) = (y \times x)(d_{r-1}(\sigma))$. Se verifică astfel relaţia
$\delta(x \cup_r y) = \delta(x) \cup_r y + x \cup_r \delta(y) + x \cup_{r-1} y + y \cup_{r-1} x$.

Dacă $x \in C_n(K) \pitchfork Z_2$, cu $\delta x = 0$, atunci $\delta(x \cup_{n-r} x) = \delta(x) \cup_{n-r} x +$
$+ x \cup_{n-r} \delta(x) + x \cup_{n-r-1} x + x \cup_{n-r-1} x = 0$ şi prin urmare
$x \cup_{n-r} x$ este un cociclu, astfel că se poate defini
$Sq^r[x] = [x \cup_{n-r} x]$.

Dacă $x' = x + \delta y$, atunci $x' \cup_{n-r} x' = (x + \delta y) \cup_{n-r} (x + \delta y) = x \cup_{n-r} x +$
$+ x \cup_{n-r} \delta y + \delta y \cup_{n-r} x + \delta y \cup_{n-r} \delta y = x \cup_{n-r} x + \delta(x \cup_{n-r} \delta y) +$
$+ \delta x \cup_{n-r} \delta y + \delta y \cup_{n-r} \delta y$. Dar $\delta x = 0$ şi $\delta(y) \cup_{n-r} \delta(y) = \delta(y \cup_{n-r} \delta y) +$
$+ \delta(y \cup_{n-r} y)$, astfel că $Sq^r[x]$ nu depinde de alegerea lui x.

Fie $x \cup'_r y = (d'_r \pitchfork 1)(x \times y)$. Atunci $x \cup'_{n-r} x = x \cup_{n-r} x + \delta z$,
pentru $z = (h_r \pitchfork 1)(x \times x)$. Rezultă deci că avem $[x \cup'_{n-r} x] = [x \cup_{n-r} x]$.
Să verificăm acum proprietţile enunţate pentru Sq^r.

(a). $Sq^r([x]+[y]) = Sq^r[x+y] = [(x+y) \cup_{n-r} (x+y)]$. Dar $(x+y) \cup_{n-r} (x+y) =$
$= x \cup_{n-r} x + y \cup_{n-r} y + x \cup_{n-r} y + y \cup_{n-r} x = x \cup_{n-r} x + y \cup_{n-r} y +$
$+ \delta(x \cup_{n-r+1} y) + \delta x \cup_{n-r+1} y + x \cup_{n-r+1} \delta y$. Cu $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, obţinem
$(x+y) \cup_{n-r} (x+y) = x \cup_{n-r} x + y \cup_{n-r} y + \delta(x \cup_{n-r+1} y)$, adică
$Sq^r([x]+[y]) = Sq^r[x] + Sq^r[y]$.

(b). Fie $f: |K| \longrightarrow |L|$. Putem presupune că f este simplicială.
Fie atunci $x \in C_n(L) \pitchfork Z_2$, cu $\delta x = 0$. Atunci: $f^* Sq^r[x] = f^*[d_{n-r} \pitchfork 1$
$(x \times x)] = [(d_{n-r} \pitchfork 1)(fx \times fx)] = Sq^r(f^*[x])$.

(c) Avem $Sq^0[x] = [x \cup_n x]$. Să arătăm că $[x \cup_n x] = [x]^2$. Avem $x \cup_n x = (d_n \curlywedge 1)(x \times x) = (x \times x) d_n$.

Arătăm că avem $d_n(\sigma \otimes 1) = (\sigma \times \sigma) \otimes 1$, pentru $\sigma \in C_n(K)$. Procedăm prin inducție după n. Pentru n=0 afirmația este imediată. Presupunem că avem $d_{n-1}(\tau \otimes 1) = (\tau \times \tau) \otimes 1$, pentru $\tau \in C_{n-1}(K)$. Fie $\sigma \in C_n(K)$. Avem atunci sau $d_n(\sigma \otimes 1) = 0$, sau $d_n(\sigma \otimes 1) = (\sigma \times \sigma) \otimes 1$.

Dacă presupunem că $d_n(\sigma \otimes 1) = 0$, atunci avem $\partial d_n(\sigma \otimes 1) + d_n \partial(\sigma \otimes 1) = (1 + T)\, d_{n-1}(\sigma \otimes 1)$. Atunci $\partial d_n(\sigma \otimes 1) = 0$ și $d_n \partial(\sigma \otimes 1) = 0$.

Prin urmare, obținem relația $d_{n-1}(\sigma \otimes 1) + T d_{n-1}(\sigma \otimes 1) = 0$. Ținînd seama că T este aplicația de lanțuri ce schimbă între ei doi factori, obținem $d_{n-1}(\sigma \otimes 1) = \sum a_i (\sigma \times \tau_i + \tau_i \times \sigma) \otimes 1$, cu $a_i = 0$ sau 1. Aceasta contrazice însă relația $d_{n-2}(\sigma \otimes 1) + T d_{n-2}(\sigma \otimes 1) = \partial d_{n-1}(\sigma \otimes 1) + d_{n-1} \partial(\sigma \otimes 1)$, deoarece coeficientul lui $(\sigma \times \sigma) \otimes 1$ în membrul drept este 2a+1=1, iar în membrul stîng este zero, datorită ipotezei inductive.

Am obținut astfel că $d_n(\sigma \otimes 1) = (\sigma \times \sigma) \otimes 1$. Avem atunci $(x \cup_n x)(\sigma \otimes 1) = (x \times x)\, d_n(\sigma \otimes 1) = (x \times x)[(\sigma \times \sigma) \otimes 1] = [x(\sigma)]^2 = x(\sigma)$, ultima egalitate avînd loc în Z_2.

(d) $Sq^r[x] = [x \cup_0 x] = (d_0 \curlywedge 1)(x \times x) = [x]^2$.

(e) este verificată din definiția homomorfismului Sq^r.

(f) Pentru poliedrul $|K| \times |L|$ drept homomorfisme d_r putem considera homomorfismele $D_r : C(|K| \times |L|) \otimes Z_2 \longrightarrow C(|K| \times |K| \times |L| \times |L|) \otimes Z_2$, definite prin $D_r((\sigma \times \mu) \otimes 1) = \sum_{i=0}^{r} d_{r-i}(\sigma \otimes 1) \times T d_i(\mu \otimes 1)$, care verifică condițiile (a), (b), (c) din (A). Avem atunci, pentru $[x] \in H^n(K; Z_2)$, $[y] \in H^m(L; Z_2)$, $((x \times y) \cup_r (x \times y))((\sigma \times \mu) \otimes 1) = \sum_{i=0}^{r} (x \cup_{r-i} x)(\sigma \otimes 1) \times (y \cup_i y)(\mu \otimes 1)$, de unde deducem $Sq^r([x] \times [y]) = \sum_{i=0}^{r} (Sq^{r-i}[x]) \times (Sq^i[y])$.

(g). Sq^r se extinde la $H^n(K;Z_2)$ adăugînd homomorfismelor $d_r, r \geq 0$, homomorfismul nenul $d_{-1}: \tilde{C}_{-1}(K)\otimes Z_2 \longrightarrow \tilde{C}_{-1}(|K|\times|K|)\otimes Z_2$.
De asemenea, se poate extinde Sq^r la $H^n(K,L;Z_2)$ deoarece d_r induc homomorfismele

$$C_n(K,L)\otimes Z_2 \longrightarrow C_{n+r}(|K|\times|K|, |L|\times|L|)\otimes Z_2 .$$

Să arătăm acum că homomorfismul

$$\delta^*: H^q(L;Z_2) \longrightarrow H^{q+1}(K,L;Z_2)$$ satisface relaţia $\delta^* Sq^r = Sq^r \delta^*$. Fie pentru aceasta $|\bar{K}| = |K| \times I/\sim$, unde $\sim$ identifică $|L|$ cu $|L|\times\{0\}$ şi fie $M = [1/2,1]\times|L| \subset |\bar{K}|$ şi $N = |K|\times[0,1/2]\cup|L| \subset |\bar{K}|$ şi $T = \{1\}\times|L|$, $S = M \cap N$. Avem atunci diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^q(L;Z_2) & \xrightarrow{\alpha} & H^q(|L|\times I;Z_2) & \xrightarrow{\simeq} & H^q(T;Z_2) & \xleftarrow{epi} & H^q(T\cup N;Z_2) & \to & H^q(T\cup S;Z_2) \\
\downarrow{\scriptstyle \delta^*} & & \downarrow{\scriptstyle \delta^*} & & \downarrow{\scriptstyle \delta^*} & & \downarrow{\scriptstyle \delta^*} & & \downarrow{\scriptstyle \delta^*} \\
H^{q+1}(K,L;Z_2) & \xrightarrow{\simeq} & H^{q+1}(|\bar{K}|, |L|\times I;Z_2) & \xleftarrow{\simeq} & H^{q+1}(|\bar{K}|, T;Z_2) & \leftarrow & H^{q+1}(|\bar{K}|, T\cup N;Z_2) & \xrightarrow{\simeq} & H^{q+1}(M,T\cup S;Z_2)
\end{array}$$

In linia inferioară izomorfismele sînt date de echivlaenţe omotopice. Pentru a dovedi relaţia $\delta^* Sq^r = Sq^r \delta^*$ pe $H^q(L;Z_2)$ este suficient să dovedim aceasta pe $H^q(T\cup N;Z_2)$. Privind ultimul pătrat din dreapta diagramei de mai sus, rezultă că este suficient să dovedim formula pentru

$$\delta^*: H^q(|L|\times \dot{I};Z_2) \longrightarrow H^{q+1}(|L|\times I, |L|\times\dot{I};Z_2).$$ Fie $\bar{0}$ şi $\bar{1}$ clasele de cocomologie în $H^0(I;Z_2)$ corespunzătoare punctelor 0 şi 1 . Fie I generatorul lui $H^1(I,\dot{I};Z_2)$. Plecînd de la $\delta^*(\bar{1}\times u) = I\times u$ şi aplicînd formula lui Cartan, avem $Sq^r \delta^*(\bar{1}\times u) = Sq^r(I\times u) = Sq^0 I \times Sq^r u = I \times Sq^r u = \delta^*(\bar{1}\times Sq^r u) = \delta^* Sq^r(\bar{1}\times u)$.
In mod analog $\delta^*(\bar{0}\times u) = -I\times u$ conduce la $Sq^r \delta^*(\bar{0}\times u) = \delta^* Sq^r(\bar{0}\times u)$

(h). Considerăm triada $(SK; K*a, K*b)$ (vezi pg.131). Atunci izomorfismul de suspensie este definit prin diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^n(K;Z_2) & \xrightarrow{(s^*)^{-1}} & H^{n+1}(SK;Z_2) \\ \delta^* \downarrow & & \downarrow \wr\ \xi^* \\ H^{n+1}(K\ a,K;Z_2) & \xleftarrow[\simeq\ \beta]{\text{excizie}} & H^{n+1}(SK,K\#b;Z_2) \end{array}$$

Săgeţile verticale sînt izomorfisme deoarece $K\#a$ şi $K\#b$ sînt contractibile. Deoarece α şi β comută cu Sq^r (conform cu (B),(b)) şi aplicînd (g), avem $Sq^r s^{n-1}=Sq^r\alpha\beta\delta^* = \alpha\beta\ Sq^r\delta^*=\alpha\beta\delta^* Sq^r=s^{n-1}Sq^r$ şi deci $s^*Sq^r=Sq^r s^*$.

8.16. Să se arate că Sq^r poate fi calculat în $H^*(RP^n;Z_2)$ după formula

$$Sq^r(x^s)=\binom{s}{r}x^{s+r},$$

unde x generează $H^1(RP^n;Z_2)$, $\binom{s}{r}$ este coeficientul binomial redus mod 2 şi $\binom{s}{r}$, x^s sînt zero dacă $r>s$, $s>n$ respectiv.

Să se arate că RP^4/RP^2 nu este retractă a lui RP^5/RP^2 (ambele spaţii sînt poliedre echivalente omotopic).

Rezolvare. Considerăm $s\le r$. Pentru $s=0$ (şi deci $r=0$), avem $Sq^0(1)=1$. Procedăm apoi prin inducţie. Presupunem formula adevărată pentru Sq^t, $t<r$ şi pentru Sq^r dacă puterea lui x este $\le s-1$.

Aplicînd atunci Exerciţiul 8.15 (f) şi (e), avem $Sq^r(x^s)=Sq^r(x\cdot x^{s-1})=$
$=Sq^0(x)\cdot Sq^r(x^{s-1})+Sq^1(x)\cdot Sq^{r-1}(x^{s-1})=x\cdot\binom{s-1}{r}x^{r+s-1}+x^2\binom{s-1}{r-1}\cdot$
$\cdot x^{r+s-2}=\left[\binom{s-1}{r}+\binom{s-1}{r-1}\right]x^{r+s}=\binom{s}{r}x^{r+s}$.

Să presupunem acum că RP^4/RP^2 este retractă a lui RP^5/RP^2 şi fie incluziunea $i:RP^4/RP^2\longrightarrow RP^5/RP^2$ şi retracţia $r:RP^5/RP^2\longrightarrow RP^4/RP^2$, cu $ri=id$, deci $i^*r^*=id$, care arată că r^* este monomorfism şi i^* este epimorfism. Avem apoi $i^*Sq^r=$
$=Sq^r i^*$ şi $r^*Sq^j=Sq^j r^*$.

Putem considera şirul exact de cohomologie

$$H^{q-1}(RP^4;Z_2)\longrightarrow H^q(RP^2;Z_2)\longrightarrow H^q(RP^4/RP^2;Z_2)\longrightarrow H^q(RP^4;Z_2)\longrightarrow$$
$$H^q(RP^2;Z_2)\longrightarrow H^{q+1}(RP^4/RP^2;Z_2)\longrightarrow\ldots$$

Deducem $H^4(RP^4/RP^2;Z_2) \cong H^4(RP^4;Z_2) \cong Z_2$, $H^3(RP^4/RP^2;Z_2) \cong H^3(RP^4;Z_2) \cong Z_2$ şi $H^q(RP^4/RP^2;Z_2)=0, q \neq 3,4$. In mod analog, avem $H^5(RP^5/RP^2;Z_2) \cong H^5(RP^5;Z_2) \cong Z_2$, $H^4(RP^5/RP^2;Z_2) \cong H^4(RP^5;Z_2) \cong Z_2$, $H^3(RP^5/RP^2;Z_2) \cong H^3(RP^5;Z_2) \cong Z_2$.

Considerînd homomorfismul $Sq^2: H^3(RP^5;Z_2) = H^3(RP^5/RP^2;Z_2) \longrightarrow H^5(RP^5;Z_2) \cong H^5(RP^5/RP^2;Z_2)$.

Conform relaţiei $Sq^2(x^3) = \binom{3}{2} x^5 = x^5$, rezultă că Sq^2 este un izomorfism. Dacă există retracţia r, atunci $Sq^2 r^*$ este monomorfism. Rezultă deci că şi $r^* Sq^2: H^3(RP^4;Z_2) \xrightarrow{Sq^2} H^5(RP^4;Z_2) = H^5(RP^4/RP^2;Z_2) \xrightarrow{r^*} H^5(RP^5/RP^2;Z_2)$ este monomorfism, ceea ce este absurd, deoarece $H^5(RP^4;Z_2)=0$ şi deci $r^* Sq^2 = 0$. Aşadar, nu există retracţia r.

8.17. Fie L un subcomplex a unei triangulări a lui S^n şi fie $\bar{L}$ suplimentul lui L; fie

$$D: \tilde{H}^r(L;Z_2) \longrightarrow \tilde{H}_{n-r-1}(\bar{L})$$

izomorfismul de dualitate Alexander din Teorema 5.3.19. Se defineşte un homomorfism $c_r(Sq^t): \tilde{H}^{r-t}(L;Z_2) \longrightarrow \tilde{H}^r(L;Z_2)$ prin formula $\langle y, Dc_r(Sq^t)\, x\rangle = \langle Sq^t y, Dx\rangle$, unde $x \in \tilde{H}^{r-t}(L;Z_2)$ şi $y \in \tilde{H}^{n-r-1}(L;Z_2)$.

(a) Utilizînd Exerciţiile 8.14 şi 8.15(f) să se arate că

$$\sum_{i=0}^{t} c_r(Sq^{t-i}) Sq^i = 0 \quad (t > 0)$$

şi să se conchidă că $c_r(Sq^t)$ depinde numai de Sq^t (şi de aceea se poate omite indicele r, scriind $c(Sq^t)$).

(b) Presupunem, dacă este posibil, că o triangulare a lui RP^{2^n} poate fi privită ca un subcomplex al unei triangulări a lui $S^{2^{n+1}-1}$. Utilizînd Exerciţiul 8.15(e), să se arate că

$$c(Sq^{2^n-1}) = 0: H^1(RP^{2^n};Z_2) \longrightarrow H^{2^n}(RP^{2^n};Z_2).$$

(c) Pe de altă parte, să se arate, utilizînd Exerciţiul 8.16, că $Sq^1, Sq^2, Sq^3, \ldots, Sq^{2^r-1}$ sînt toate zero pe x^{2^r} şi să se arate că $c(Sq^{2^n-1})\, x = x^{2^n}$. Contradicţia celor două formule arată că RP^{2^n} nu poate fi scufundat ca un subcomplex a unei triangulări

a sferei $S^{2^{n+1}-1}$.

Rezolvare. Pentru $x \in \tilde{H}^{r-t}(L;Z_2)$ şi $y \in H^{n-r-1}(\bar{L};Z_2)$, avem $Dx \in \tilde{H}_{n-r+t-1}(L;Z_2)$ şi $Sq^t y \in \tilde{H}^{n-r+t-1}(\bar{L};Z_2)$. Deoarece Z_2 este un cîmp, prin produsul Kronecker spaţiile vectoriale $H^{n-r-1}(\bar{L};Z_2)$ şi $\tilde{H}_{n-r-1}(\bar{L};Z_2)$ sînt duale (Propoziţia 5.2.11) şi la fel sînt spaţiile $\tilde{H}^{n-r+t-1}(\bar{L};Z_2)$ şi $\tilde{H}_{n-r+t-1}(\bar{L};Z_2)$. Rezultă, din Propoziţia 1.3.53, că aplicaţiei liniare $Sq^t : \tilde{H}^r(\bar{L};Z_2) \longrightarrow \tilde{H}^{r+t}(\bar{L};Z_2)$ îi corespunde o aplicaţie liniară $De_r(Sq^t) : \tilde{H}^{r-t}(L;Z_2) \longrightarrow \tilde{H}_{n-r-1}(\bar{L};Z_2)$. Există atunci $c_r(Sq^t) : \tilde{H}^{r-t}(L;Z_2) \longrightarrow \tilde{H}^r(L;Z_2)$ încît să avem $\langle y, De_r(Sq^t)x \rangle = \langle Sq^t y, Dx \rangle$.

(a). Fie $x \in \tilde{H}^{r-t}(L;Z_2)$, $y \in H^{n-r-1}(\bar{L};Z_2)$. Avem atunci $\langle y, De_r(Sq^{t-i})(Sq^i x) \rangle = \langle Sq^{t-i} y, DSq^i x \rangle$. Apoi, $D = \partial_* D_1$, unde $D_1 : \tilde{H}^r(\bar{L};Z_2) \longrightarrow \tilde{H}_{n-r}(\bar{P},\bar{L};Z_2)$ este dualitatea Poincaré şi $\partial_* : \tilde{H}_{n-r}(\bar{P},\bar{L};Z_2) \longrightarrow \tilde{H}_{n-r-1}(\bar{L};Z_2)$ este homomorfismul de frontieră (de fapt izomorfism, deoarece $H_*(\bar{P}) = 0$). Prin urmare:

$$\langle y, De_r(Sq^{t-i})Sq^i(x) \rangle = \langle Sq^{t-i} y, DSq^i x \rangle = \langle Sq^{t-i} y, \partial_* D_1 Sq^i x \rangle =$$
$$= \langle \delta^* Sq^{t-i} y, D_1 Sq^i x \rangle = \bar{D}\,\Delta^*(Sq^{t-i}\delta^* y \smile Sq^i x)$$

(cf. Exerciţiului 8.14, unde $\bar{D} : H^n(K') \longrightarrow H_0(K') \cong Z$ este izomorfismul de dualitate Poincaré ($|K| = S^n$)). În continuare avem:

$$\langle y, D(\sum_{i=0}^{t} c_r(Sq^{t-i})Sq^i(x) \rangle = \sum_{i=0}^{t} \langle y, De_r(Sq^{t-i})\,Sq^i(x) \rangle =$$
$$= \sum_{i=0}^{t} \bar{D}\,\Delta^*(Sq^{t-i}\delta^* y \smile Sq^i x) = \bar{D}\,\Delta^*(\sum_{i=0}^{t} Sq^{t-i}\delta^* y \smile Sq^i x) =$$
$$= \bar{D}\,\Delta^* Sq^t(\delta^* y \smile x) = DSq^t[\Delta^*(\delta^* y \smile x)] = 0,$$

întrucît $Sq^t : H^{n-t}(S^n) \longrightarrow H^n(S^n)$ este homomorfismul nul pentru $t > 0$. Deoarece y este ales arbitrar în $\tilde{H}^{n-r-1}(\bar{L};Z_2)$, obţinem $D(\sum_{i=0}^{t} c_r(Sq^{t-i})Sq^i(x) = 0$ şi deducem astfel că avem, pentru $\forall\, x \in \tilde{H}^{r-t}(L;Z_2)$, $\sum_{i=0}^{t} c_r(Sq^{t-i})Sq^i(x) = 0$.

(b) Să presupunem că RP^{2^n} este un subcomplex al unei triangulări a sferei $S^{2^{n+1}-1}$ $(n \geq 4)$. Considerăm atunci homomorfismul $c(Sq^{2^n-1}): H^1(RP^{2^n}; Z_2) \longrightarrow H^{2^n}(RP^{2^n}; Z_2)$. Din relația $\langle y, Dc(Sq^{2^n-1})(x)\rangle = \langle Sq^{2^n-1}y, Dx\rangle = 0$, deoarece homomorfismul $Sq^{2^n-1}: H^1(RP^{2^n}; Z_2) \longrightarrow H^{2^n}(RP^{2^n}; Z_2)$ este nul (Exercițiul 8.15) (A (c)), ținînd seama că are loc pentru orice y și că D este izomorfism, deducem $c(Sq^{2^n-1}) = 0$.

(c) Din Exercițiul 8.16 avem:

$$Sq^1(x^{2^r}) = \binom{2^r}{1} x^{2^r+1} = 0,$$

$$Sq^2(x^{2^r}) = \binom{2^r}{2} x^{2^r+2} = 0,$$

.....

$$Sq^{2^r-1}(x^{2^r}) = \binom{2^r}{2^r-1} x^{2^{r+1}-1} = 0.$$

Avem apoi din (a):

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} c(Sq^{2^n-1-i})\, Sq^i(x) = 0,$$ care împreună cu relațiile de mai sus implică $c(Sq^{2^n-1})(x) + c(Sq^{2^n-2})(x^2) = 0$.

Avem apoi $c(Sq^{2^n-2})Sq^0(x^2) + c(Sq^{2^n-3})Sq^1(x^2) + c(Sq^{2^n-4})Sq^2(x^2) = 0$, adică $c(Sq^{2^n-2})(x^2) = c(Sq^{2^n-4})(x^4)$ și prin urmare avem $c(Sq^{2^n-1})(x) = c(Sq^{2^n-2})(x^2) = c(Sq^{2^n-4})(x^4)$. Din aproape în aproape deducem

$$c(Sq^{2^n-1})(x) = c(Sq^{2^n-2^k})(x^{2^k}) = c(Sq^0)(x^{2^n}) = x^{2^n}.$$

Deoarece x^{2^n} este generatorul grupului $H^{2^n}(RP^{2^n}; Z_2)$, relațiile $c(Sq^{2^n-1})(x) = 0$ și $c(Sq^{2^n-1})(x) = x^{2^n}$ sînt contradictorii.

Astfel, RP^{2^n} nu se poate scufunda ca subpoliedru în $S^{2^{n+1}-1}$, pentru $n \geq 1$.

□

1) Teoreme de izomorfism de tip Hurewicz (în legătură cu Exercițiul 8.1 se pot afla, de exemplu în E.H. Spanier, Algebraic Topology, Mir, 1971, §§4, 5 Cap. 7.
De asemenea în aceeași carte, în § 6, Cap. 9, se găsesc generalizări ale acestui tip de teoreme, în ipoteza că grupurile

de omotopie şi omologie care intervin fiind dintr-un inel oarecare de grupuri abeliene.

2) O serie de proprietăţi ale grupurilor de cohomologie asociate cu un spectru (în legătură cu Exerciţiul 8.5 ,a) se pot afla, de exemplu, în R.M.Switser, Algebraic Topology-Homotopy and Homology, Springer Verlag, 1975 .

3) Pentru studiul mai detaliat al spaţiilor Eilenberg-Mac Lane se poate consulta, de exemplu, G.W.Whitehead, Elements of Homotopy Theory, Springer-Verlag, 19 8, sau P.J.Hilton & S.Wylie, Homology Theory, An Introduction to Algebraic Topology, Cambridge Univ.Press, 1960, în legătură şi cu omologia şi cohomologia modulelor şi grupurilor, § 10.7 , sau în E.H.Spanier (op.cit., Cap.8), în legătură cu teoria obstrucţiei .

4) Teoria obstrucţiei (Exerciţiul 8.8) este desvoltată de asemenea în P.J.Hilton & S.Wylie (op.cit.Cap.7), unde se consideră şi situaţia mai generală cînd Y nu este (n-1)-simplu, dar se utilizează sisteme locale de coeficienţi pentru cohomologie.

5) Pentru o tratare mai amplă şi puţin diferită a invariantului lui Hopf (Exerciţiul 8.11) se poate consulta, de exemplu, P.J.Hilton & S.Wylie (op.cit. § 9.5) şi G.W.Whitehead (op.cit. Ch.XI).

6) Unele proprietăţi ale produsului din Exerciţiul 8.13 , într-un cadru mai general, pot fi găsite în E.H.Spanier (op.cit.Cap.6).

7) Pătratul Steenrod (sau pătratul redus) Sq^r (Exerciţiile 8.15 şi 8.16) este detaliat prezentat în E.H.Spanier (op.cit. § 9, Cap.5) şi G.W.Whitehead (op.cit.Cap.8). Pe lîngă proprietăţile expuse în exerciţii, este de un interes aparte următoarea formulă a lui J.Adem (Proc.Nat.Acad.Sci.USA, 38(1952), p. 720), privind iterarea pătratelor Steenrod:

$$Sq^i Sq^j = \sum_{0 \leq k \leq [i/2]} \binom{j-k-1}{i-2k} Sq^{i+j-k} Sq^k, \quad 0 < i < 2j .$$

ALGEBRAIC TOPOLOGY
A PROBLEM BOOK
(Abstract)

This book contains the solutions of the Exercices of C.R.F.MAUNDER'book ALGEBRAIC TOPOLOGY,Cambridge University Press,1980.

The Exercices of Chapter 1 are also formulated by us and some of these exercices are used for others solutions.

Also there are Complements,denoted by [C] ,at the end of each Chapter,which contain partly bibliographical indications and partly comments and generalizations of some exercices.

The necessary theoretical informations are not included in this book.The bibliographical indications of the form "Theorem a.b.c" or of the form "pg.n" are references to the Maunder's book.The reference "Exercice p.q" denotes Exercice q of Chapter p of this book.

Of course,we are indebted to the excelent book of Maunder, which has been detailed studied in the our Seminar in Algebraic Topology.

Also we should like to mention the attention paid to our bock of the Chair of Geometry and Topology of the Faculty of Mathematics of the University of Jassy.

Authors

Scanned with OKEN Scanner

CONTENTS

Chapter 1 ALGEBRAIC AND TOPOLOGICAL PRELIMINARIES..... 1

Chapter 2 HOMOTOPY AND SIMPLICIAL COMPLEXES..... 11

Chapter 3 THE FUNDAMENTAL GROUP..... 26

Chapter 4 HOMOLOGY THEORY..... 52

Chapter 5 COHOMOLOGY AND DUALITY THEOREMS..... 78

Chapter 6 GENERAL HOMOTOPY THEORY..... 107

Chapter 7 HOMOTOPY GROUPS AND CW-COMPLEXES..... 147

Chapter 8 HOMOLOGY AND COHOMOLOGY OF CW-COMPLEXES..... 194

Scanned with OKEN Scanner